

Jälleenvakuutuksen arvo
työtapaturmavakuutuksessa

Suppea SHV-työ

Simo Poranen¹

2024

¹simo.poranen@gmail.com

Abstract

This paper aims to estimate the value of a reinsurance contract from the cedent's point of view. The analysis is limited to the excess of loss reinsurance of the Finnish statutory workers' compensation insurance, but the method can be applied more widely.

A Monte Carlo simulation of a hierarchical model is used to generate the distribution of present value of a one-year total claim amount. Model parameters are estimated based on data provided by Finnish Workers' Compensation Center. Mixed Poisson and mixed Pareto distributions are used to generate the number of claims and the claim severities respectively. The effect of discount rate is estimated by splitting the severities into cash flows.

A reinsurance contract decreases both the expected total claim amount and the cost of capital. The capital requirement is estimated as the $\text{VaR}_{0,995}$ of the simulated total claim amount, whereas the 6 % rate of return is based on regulation.

The simulation yields distributions for the value of a contract for different reinsurance limits. The value is shown to decrease quickly as the limit goes up. Distributions for the reimbursement factor and conditional distributions given the limit is exceeded are also presented. In addition, the model's sensitivity to different parameter and distribution choices is covered. It is worthy of note how both the absolute and relative values of a contract decrease as the discount rate goes up.

Tiivistelmä

Tässä työssä arvioidaan jälleenvakuutus sopimuksen arvoa ensivakuuttajalle eri omapidätystasoilla. Tarkastelu on rajattu suomalaisen työtaturmavakuutuksen Excess of loss -jälleenvakuutukseen, mutta kuvattu menettely on sovellettavissa laajemmin.

Menetelmänä on Monte Carlo -simulaatio hierarkkiselle mallille, joka tuottaa yhden vuoden suurvahinkojen korvausmenon nykyarvon jakauman. Mallin parametrit estimoidaan Työtaturmavakuutuskeskuksen koko toimialan kattavan suurvahinkoaineiston perusteella. Simulaatiomallissa vuosittainen vahinkolukumäärä määräytyy painotetun Poisson-jakauman perusteella ja yksittäisen vahingon suuruus painotetun Pareto-jakauman perusteella. Mallissa pyritään myös huomioimaan käytetyn diskonttokoron vaikutus jaksottamalla korvaus-suuritteita yli ajan.

Jälleenvakuutus sopimus hyödyttää ensivakuuttajaa pienentämällä yhtäältä korvausmenoa ja toisaalta pääoman kustannusta. Pääomavaadetta arvioidaan simuloidun jakauman perusteella $VaR_{0,995}$ -luvulla, kun taas pääoman tuottovaa-de 6 % perustuu sääntelyyn.

Tuloksena saadaan jälleenvakuutus sopimuksen arvon jakaumia eri omapidätys-rajoille. Odotusarvomielessä jälleenvakuutus sopimuksen arvo pienenee nopeasti omapidätysrajan funktiona. Malli tuottaa myös voimaanpalautusmaksuun liit-tyvän kertoimen jakauman ja sopimuksen arvon ehdollisen jakauman tilanteessa, jossa omapidätysraja ylittyy. Lisäksi käydään läpi simulaatiomallin herkkyyttä parametri- ja jakaumavalinnoille. Huomionarvoisin havainto on, kuinka jälleenvakuutus sopimuksen arvo pienenee sekä absoluuttisesti että suhteellisesti, kun käytetty diskonttokorko kasvaa.

Sisältö

Merkintöjä	v
1 Johdanto	1
2 Lakisääteinen tapaturmavakuutus	1
3 Korvauskassavirta ja diskonttaus	2
4 Excess of loss -jälleenvakuutus	2
5 Jälleenvakuutus sopimuksen arvo	3
6 Eräitä jakaumia	4
7 Tarkasteltava malli	6
8 Aineisto	8
9 Parametrien estimointi	8
9.1 Parametri α	9
9.2 Parametri λ	12
9.3 Estimaattien herkkyys aineiston muutoksille	12
9.4 Korvausmenon jaksotus yli ajan	13
10 Simulaatiomalli	13
11 Tulokset	14
11.1 Tuloksen muodostuminen	14
11.2 Herkkyystarkasteluja	17
12 Yhteenveto	19
Lähteet	21
Liite: Ohjelmakoodi	22

Merkintöjä

A	Parametrin α jakauma
α	Pareto-jakauman muotoparametri
$\arg \max_{\alpha} f(\alpha, x_1, \dots, x_n)$	Se muuttujan α arvo, joka maksimoi funktion f annettuna muiden muuttujien x_i arvot
$\arg \min_{\alpha} f(\alpha, x_1, \dots, x_n)$	Se muuttujan α arvo, joka minimoi funktion f annettuna muiden muuttujien x_i arvot
B_t	Yksittäisen vahingon korvaussuorite t vuoden kuluttua sattumishetkestä
c	Pareto-jakauman skaalaparametri (alaraja)
c_t	Sattumisvuoden t teoreettinen pienin vahinko aineistossa
$E[\xi]$	Satunnaismuuttujan ξ odotusarvo
f_D	Geneerisen jakauman D todennäköisyysfunktio (pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio)
K	Ensivakuuttajan vuosittaista vahinkolukumäärää kuvaava satunnaismuuttuja
\mathcal{K}	Koko toimialan vuosittaista vahinkolukumäärää kuvaava satunnaismuuttuja
ξ	Geneerinen satunnaismuuttuja
$\hat{\xi}, \check{\xi}$	Estimaattoreita ja estimaatteja
$\tilde{\xi}$	Suureen ξ nykyarvo
k_{vp}	Jälleenvakuutussopimuksen voimaanpalautusmaksun hinnoittelukerroin
L	Parametrin λ jakauma
λ	Poisson-jakauman intensiteettiparametri
$[a]$	Lattiaoperaattori, suurin korkeintaan luvun a suuruinen kokonaisluku
M	XL -jälleenvakuutussopimuksen omavastuuraja (omapidätysraja)
m	Jälleenvakuutussopimuksen hinta
$\min \Omega$	Geneerisen joukon Ω pienin luku
p	Ensivakuuttajan markkinaosuus
q	Pääoman kustannus
r	Diskonttokorko
σ_{ξ}	Satunnaismuuttujan ξ keskihajonta
$\text{Var}[\xi], \sigma_{\xi}^2$	Satunnaismuuttujan ξ varianssi
$\text{VaR}_{\theta}[\xi]$	Value at risk; luku, jota pienemmän arvon satunnaismuuttuja ξ saa todennäköisyydellä θ
W	Eläkkeen maturiteetin T jakauma
w, w^r, w^s, w^t	Estimointien painokertoimia

X	Vuosittaista korvausmenoa kuvaava satunnaismuuttuja
X^{jv}	Jälleenvakuuttajan vastuulle XL -sopimuksen nojalla siirtyvä osuus vuosittaisesta korvausmenosta
X^{ov}	Ensivakuuttajan vastuulle XL -sopimuksen nojalla jäävä osuus vuosittaisesta korvausmenosta
XL	Excess of loss, yksittäisyli vahinkojälleenvakuutus
Z	Yksittäisen vahingon suuruutta kuvaava satunnaismuuttuja
Z^{jv}	Jälleenvakuuttajan vastuulle XL -sopimuksen nojalla siirtyvä osuus yksittäisestä vahingosta
Z^{ov}	Ensivakuuttajan vastuulle XL -sopimuksen nojalla jäävä osuus yksittäisestä vahingosta

Työssä on pyritty käyttämään lähteen [1] kanssa yhdenmukaisia merkintöjä.

1 Johdanto

Työn tavoitteena on rakentaa kehikko jälleenvakuutusjärjestelyn arvon arvioimiseksi. Esimerkkitapaukseksi on valittu lakisääteisen tapaturmavakuutuksen Excess of loss -jälleenvakuutus. Tapaturmavakuutuksesta on käytettävissä Tapaturmavakuutuskeskuksen kokoama ja jäsenyhtiöilleen toimittama suurvahinkoaineisto, jonka perusteella estimoidaan mallit vahinkotiheydelle ja vahingon suuruudelle. Lisäksi muodostetaan yksinkertainen malli korvausmenon jaksotamiseksi yli ajan. Näin voidaan arvioida jälleenvakuutussopimuksen arvoa korvausmenon nykyarvon perusteella.

Suurvahinkoaineisto sisältää 256 nimellisarvoltaan 1,5 miljoonaa euroa ylittävää vahinkoa vuosilta 2000–2022. Koska aineisto on niukka ja pitkältä ajalta ja perustuu nimellisarvoihin, parametriestimointi ei ole aivan suoraviivaista.

Kiinnostuksen kohteena ei ole pelkästään sopimuksen arvo sinänsä, vaan myös arvon herkkyys tehdyille parametri- ja jakaumaoletuksille.

Vakuutusyhtiöllä voi olla jälleenvakuuttamiselle toissijaisena motiivina myös vuosittaisen korvausmenon vaihtelun pienentäminen riippumatta pääoman kustannuksesta. Asiaa olisi mahdollista tutkia vertailemalla ensivakuuttajien maksuhalukkuutta mallin tuottamiin jälleenvakuutuksen arvoihin.

Myös käytössä olevan pääoman määrä voi asettaa vaatimuksia jälleenvakuutusjärjestelyn valinnalle.

Lakisääteinen tapaturmavakuutus ja sen jakojärjestelmä käydään lyhyesti läpi kappaleessa 2. Kappaleessa 3 esitellään korvauskassavirtaa koskevat yksinkertaistavat oletukset ja käydään läpi kassavirtojen diskonttaus. Kappaleessa 4 käsitellään Excess of loss -jälleenvakuutusta erityisesti siitä näkökulmasta, että ensivakuuttajan vastuulle jäävät korvaussuoritukset ajoittuvat ennen jälleenvakuuttajan osuutta.

Kappaleessa 5 johdetaan jälleenvakuutussopimuksen arvo korvausmenon nykyarvon ja pääomavaateen avulla. Kappaleessa 6 esitellään työssä käytetyt jakauumat, ja kappaleessa 7 käydään läpi tarkasteltava malli.

Kappaleessa 8 esitellään estimointeihin käytetty suurvahinkoaineisto, ja kappaleessa 9 käydään läpi parametrien estimointi aineiston perusteella. Käytetty simulaatiomalli esitellään kappaleessa 10, ja simulaatioiden tulokset on koottu kappaleeseen 11. Kappale 12 on yhteenveto työstä.

2 Lakisääteinen tapaturmavakuutus

Työtapaturma- ja ammattitautilaki [2] velvoittaa työnantajan vakuuttamaan työntekijät työtapaturmien ja ammattitautien varalta. Vastaavasti lakisääteistä tapaturmavakuutusta harjoittavalla vakuutusyhtiöllä on velvollisuus myöntää vakuutus. Vakuutus korvaa mm. tapaturmaeläkkeitä, sairaanhoidon ja kuntoutuksen kustannuksia, haittarahoja ja perhe-eläkkeitä.

Laissa säädetään myös jakojärjestelmästä, josta maksetaan ansionmenetykskorvausten vuosittaiset indeksikorotukset. Lisäksi yksittäisen vahingon korvausmenon ylittäessä 75 miljoonaa euroa jakojärjestelmä korvaa ylittävän osan. Lakisääteistä tapaturmavakuutusta harjoittavat yhtiöt kattavat jakojärjestelmän kulut vakuutusmaksutulojensa suhteessa. Erityisesti siis inflaatoriski on ansionmenetykskorvausten osalta tulevien vakuutuksenottajien kannettavana.

3 Korvauskassavirta ja diskonttaus

Tarkastellaan jatkossa yksinkertaistettua tilannetta, jossa korvaus koostuu kertaerästä B_0 hetkellä $t = 0$ ja $T \geq 0$ vuotta kerran vuodessa maksettavasta vakioeläkkeestä

$$B = B_1 = B_2 = \dots = B_T.$$

Tällöin vahingon nimellisarvoinen suuruus on $Z = \sum_{i=0}^T B_i = B_0 + TB$.

Kun diskonttokorko on $r > 0$, hetkellä t maksettavan erän nykyarvo on $\frac{B_t}{(1+r)^t}$, joten eläkeuotoisen korvauksen nykyarvo on

$$\tilde{Z} = \sum_{t=0}^T \frac{B_t}{(1+r)^t} = B_0 + \frac{B}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T} \right).$$

4 Excess of loss -jälleenvakuutus

Tämä kappale perustuu lähteen [1, ss. 47–48] lisäksi Keskinäisen vakuutusyhtiö Fennian jälleenvakuutusjohtaja Oke Rautaheimolta saatuihin tietoihin.

Excess of loss (XL) on yleisesti käytetty jälleenvakuutusjärjestely. XL-jälleenvakuutuksessa eli yksittäisylivahinkojälleenvakuutuksessa jälleenvakuuttaja ottaa vastuulleen kustakin yksittäisestä vahingosta omavastuu- tai omapidätysrajan M ylittävän osan maksimikorvausmäärään M' asti.

Erityisesti työtaturmavakuutuksessa on käytössä edellä kuvattu jakojärjestelmä, joka rajoittaa korvausmenon suurvahinkorajaan $M^{jj} = 75\,000\,000$ €, joten maksimikorvausmäärän ei ole järkevää olla tätä suurempi. Oletetaan jatkossa, että $0 < M < M' = M^{jj}$.

Kun yksittäisen vahingon suuruus on Z , ensivakuuttajan osuudeksi jää

$$(4.1) \quad Z^{ov} = \min \{ Z, M \}$$

ja jälleenvakuuttajan osuudeksi

$$(4.2) \quad Z^{jv} = \min \{ Z, M^{jj} \} - Z^{ov}.$$

Tyypillisesti XL-järjestelyissä sovitaan *voimaanpalautusmaksusta*, joka ensivakuuttajan on maksettava jälleenvakuuttajalle rajan M ylittyessä, jotta jälleenvakuutussuoja pysyy voimassa sovitun kauden loppuun. Tavanomainen tapa määrätä voimaanpalautusmaksun suuruus on

$$m_{vp} = mk_{vp} = m \frac{Z^{jv}}{M^{jj} - M},$$

missä m on sopimuksen alkuperäinen hinta. On siis huomioitava, että hintaan m hankitun jälleenvakuutussuojan todellinen hinta onkin $(1 + \sum k_{vp}^i) m$, missä summa yli kauden vahinkojen voimaanpalautusmaksujen $\sum k_{vp}^i \geq 0$ on stokastinen. Ilmiö korostuu, jos omapidätysraja on matala. Tässä työssä ei rajoiteta mahdollisten voimaanpalautusten lukumäärää tai huomioida mahdollisia indeksilausekkeita.

Lisäksi on huomionarvoista, että eläketyyppisessä korvauksessa jälleenvakuutus-

raja ylittyy vasta, kun ensivakuuttajan osuus on maksettu korvauksensaajalle. On tilanteita, joissa tämä tapahtuu vasta vuosikymmenien päästä, mikä pienentää jälleenvakuutus sopimuksen vaikutusta ensivakuuttajan osuuden nykyarvoon, kun diskonttokorko on positiivinen.

Tämän huomioimiseksi muotoillaan yhtälöistä 4.1 ja 4.2 versiot kappaleessa 3 kuvatussa tilanteessa. Merkitään katkaisuhetkiä

$$T_{jv} = \min \{T, \min \{t \geq 0 \mid B_0 + tB \geq M\}\}$$

ja

$$T_{jj} = \min \{T, \min \{t \geq 0 \mid B_0 + tB \geq M^{jj}\}\}.$$

Tällöin ensivakuuttajan osuudeksi jäävät erät

$$B_0, B_1, \dots, B_{T_{jv}-1}, B_{T_{jv}}^{ov},$$

missä

$$B_{T_{jv}}^{ov} = \min \left\{ B_{T_{jv}}, M - \sum_{i=0}^{T_{jv}-1} B_i \right\}$$

ja jälleenvakuuttajan osuudeksi erät

$$B_{T_{jv}}^{jv}, B_{T_{jv}+1}, \dots, B_{T_{jj}-1}, B_{T_{jj}}^{jv},$$

missä

$$B_{T_{jv}}^{jv} = B_{T_{jv}} - B_{T_{jv}}^{ov}$$

ja

$$B_{T_{jj}}^{jv} = \min \left\{ B_{T_{jj}}, M^{jj} - \sum_{i=0}^{T_{jj}-1} B_i \right\}.$$

Näiden erien nykyarvot voidaan laskea kappaleessa 3 kuvatulla tavalla. Yhtälöt 4.1 ja 4.2 saadaan erikoistapauksena asettamalla $B_0 = Z$ ja $B = 0$.

5 Jälleenvakuutus sopimuksen arvo

Olkoon XL-sopimuksen katkaisuraja M , diskonttokorko r ja sattumisvuoden vahinkolukumäärä k . Merkitään diskontattua ensivakuuttajan osuutta kokonaiskorvausmenosta

$$\tilde{X}^{ov}(M, r) = \tilde{Z}_1^{ov}(M, r) + \tilde{Z}_2^{ov}(M, r) + \dots + \tilde{Z}_k^{ov}(M, r)$$

ja vastaavasti jälleenvakuuttajan osuutta

$$\tilde{X}^{jv}(M, r) = \tilde{Z}_1^{jv}(M, r) + \tilde{Z}_2^{jv}(M, r) + \dots + \tilde{Z}_k^{jv}(M, r).$$

Yksinkertaistetaan lisäksi merkintöjä määrittelemällä

$$\tilde{X}(r) = \tilde{X}^{ov}(M^{jj}, r),$$

eli jatkossa kokonaiskorvausmenon nykyarvo $\tilde{X}(r)$ ei sisällä mahdollista jakojärjestelmän kattamaa osuutta, ja kaikilla $0 < M < M^{jj}$ pätee

$$\tilde{X}(r) = \tilde{X}^{ov}(M, r) + \tilde{X}^{jv}(M, r).$$

Käytetään pääomavaateena ensivakuuttajan kokonaiskorvausmenon nykyarvon 99,5 prosentin Value at Risk -lukua $\text{VaR}_{0,995}[\tilde{X}^{ov}]$. Tällä tarkoitetaan yhden vuoden diskontatun korvausmenojakauman sitä kohtaa, jonka alapuolella on 99,5 % todennäköisyysmassasta [3, s. 391]. Havainnollisesti siis varaamalla tämän pääoman ensivakuuttaja joutuu odotusarvoisesti vararikoon kerran 200 vuodessa. Näin laskettu pääomavaade on turvaava yksinkertaistus.¹

Käytetään pääoman kustannuksena sääntelyn mukaista arvoa $q = 0,06$ [4, artikla 39].

Tällöin sidotun pääoman kustannus on ilman jälleenvakuutussopimusta

$$q\text{VaR}_{0,995}[\tilde{X}(r)]$$

ja jälleenvakuutussopimuksen ollessa voimassa

$$q\text{VaR}_{0,995}[\tilde{X}^{ov}(M, r)].$$

Näinollen yksittäiselle sattumisvuodelle i jälleenvakuutussopimuksen arvo on

$$V_i(M, r) = \tilde{X}_i^{jv}(M, r) + q(\text{VaR}_{0,995}[\tilde{X}(r)] - \text{VaR}_{0,995}[\tilde{X}^{ov}(M, r)]).$$

Tässä vain summan ensimmäinen termi on yksittäiselle sattumisvuodelle stokastinen.

6 Eräitä jakaumia

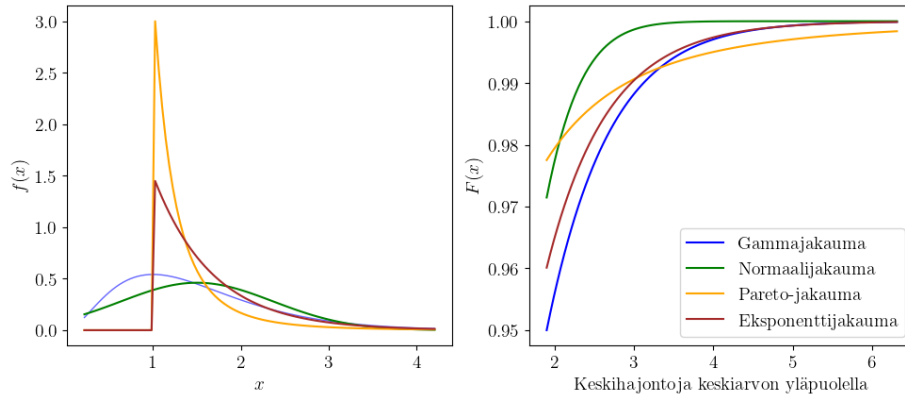
Taulukossa 1 on esitetty tässä työssä käytetyt todennäköisyysjakaumat [1, ss. 9–24].

Jakauma	Merkintä	Todennäköisyysfunktio	Parametrit
Gamma	$\Gamma(r, \beta)$	$f(x) = \frac{\beta^r}{\Gamma(r)} e^{-\beta x} x^{r-1}$	muoto $r > 0$, intensiteetti $\beta > 0$, $\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-u} u^{r-1} du$
Normaali	$N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	keskiarvo μ , keskihajonta $\sigma > 0$
Pareto	$\text{Pareto}(\alpha, c)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha c^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{kun } x \geq c, \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$	muoto $\alpha > 0$, skaala $c > 0$
Poisson	$\text{Poisson}(\lambda)$	$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	intensiteetti $\lambda > 0$
Binomi	$\text{Bin}(n, p)$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	lukumäärä $n \geq 0$, todennäköisyys $p \geq 0$

Taulukko 1: Työssä sovellettujen jakaumien tiheys- tai pistetodennäköisyysfunktiot parametreineen.

¹Tässä tarkasteltu kokonaiskorvausmeno on yksi komponentti määritettäessä yhtiön kokonaispääomavaadetta. Kokonaispääomavaadetta määritettäessä saadaan hajautushyötyä pääomavaadetta aiheuttavien komponenttien välillä.

Tässä työssä suurvahinkojen suuruuden jakaumana käytetty Pareto-jakauma on esimerkki *paksuhäntäisestä jakaumasta*: häntätodennäköisyys $P(X > x) = \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha$ on muuttujan x riittävän suurilla arvoilla intensiteetistä $\lambda > 0$ riippumatta suurempi kuin rajatapauksena pidetyllä eksponenttijakaumalla, jolla $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ [5, mukaillen s. 5]. Havainnollisesti siis paksuhäntäinen jakauma tuottaa enemmän suuria arvoja. Sopivilla parametrivalinnoilla momentit ovat äärettömiä (Pareto-jakaumalla näin käy keskiarvolle, kun $\alpha < 1$, ja keskihajonnalle, kun $\alpha < 2$, jolloin vaikkapa keskeisen raja-arvolauseen oletukset eivät ole voimassa). Muut työssä sovelletut jakaumat ovat *ohuthäntäisiä*. Työssä sovellettujen jatkuvien jakaumien häntiä on havainnollistettu kuvassa 1.



Kuva 1: Gamma-, normaali-, eksponentti- ja Pareto-jakaumien tiheysfunktiot ja kertymäfunktiot hännässä. Valittu Pareto-jakauman parametreiksi $c = 1$ ja $\alpha = 3$ ja asetettu gamma- ja normaalijakaumille sama keskiarvo (1,5) ja keskihajonta (0,87) kuin Pareto-jakaumalla.

Olkoot $x > x_0 > c$. Jos satunnaismuuttuja X noudattaa Pareto(α, c)-jakaumaa, ehdolliselle todennäköisyydelle pätee

$$P(X > x \mid X > x_0) = \frac{P(X > x \text{ ja } X > x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{P(X > x)}{P(X > x_0)} = \frac{\left(\frac{c}{x}\right)^\alpha}{\left(\frac{c}{x_0}\right)^\alpha} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha,$$

eli $X \mid (X > x_0) \sim \text{Pareto}(\alpha, x_0)$. Erityisesti muotoparametri α säilyy samana, vaikka tarkasteltaisiin vain Pareto-jakauman häntää. Lisäksi on huomionarvoista, että jos satunnaismuuttuja X noudattaa Pareto(α, c)-jakaumaa, niin $\ln \frac{X}{c}$ noudattaa eksponenttijakaumaa intensiteetillä α , koska

$$P\left(\ln \frac{X}{c} > x\right) = P(X > ce^x) = \left(\frac{c}{ce^x}\right)^\alpha = e^{-\alpha x}.$$

Jos tunnetaan gamma-jakauman keskiarvo μ ja keskihajonta σ , voidaan ratkaista

$$(6.1) \quad \begin{cases} \beta = \frac{\mu}{\sigma^2} \\ r = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \end{cases}.$$

Olkoon yhtiön markkinaosuus p . Tällöin yhtiön vahinkolukumäärä saadaan

hierarkkisesta mallista, jossa satunnaismuuttuja $\mathcal{K} \sim \text{Poisson}(\lambda)$ tuottaa koko markkinan vahinkolukumäärän κ ja tämän jälkeen satunnaismuuttuja $K \sim \text{Bin}(\kappa, p)$ tuottaa yhtiökohtaisen vahinkolukumäärän k . Kyse on toistokokeesta, jossa yksittäinen vahinko osuu yhtiön kantaan todennäköisyydellä p . Tällöin

$$\begin{aligned} P(K = k) &= \sum_{\kappa=k}^{\infty} P(K = k \mid \mathcal{K} = \kappa) P(\mathcal{K} = \kappa) \\ &= \sum_{\kappa=k}^{\infty} \frac{\kappa!}{k!(\kappa-k)!} p^k (1-p)^{\kappa-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} = \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^k}{k!} \sum_{\kappa=k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{\kappa-k}}{(\kappa-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}, \end{aligned}$$

eli $K \sim \text{Poisson}(p\lambda)$.

7 Tarkasteltava malli

Työn tavoitteena on arvioida yhden vuoden suurvahinkojakaumaa ja sen perusteella jälleenvakuutus sopimuksen arvoa. Simulaatio rakentuu kolmesta hierarkkisesta mallista¹:

1. Malli vahinkojen lukumäärälle: ensin jakauma L tuottaa parametrin λ_i ja sitten $\text{Poisson}(p\lambda_i)$ -jakauma tuottaa vahinkolukumäärän K_i .
2. Malli yksittäisen vahingon suuruudelle eli severiteetille: ensin jakauma A tuottaa parametrin α_{ij} ja sitten $\text{Pareto}(\alpha_{ij}, c)$ -jakauma tuottaa severiteetin Z_{ij} .
3. Malli severiteetin Z_{ij} jaksottamiseksi kassavirroiksi B_0, B_1, \dots, B_T : Ensin allokoidaan vakio-osuus severiteetistä hetkelle $t = 0$. Sitten jakauma W tuottaa keston T , ja loput severiteetistä jaetaan tasan hetkille $t = 1, \dots, T$.

Lyhyt johdanto hierarkkisiin malleihin löytyy lähteestä [6, s. 1-3]. Tämän työn puitteissa riittää hahmottaa, että simulaatioon tuotetaan lisää variaatiota olettamalla, että parametrit λ ja α generoituvat tietyistä *priorijakaumista* L ja A , sen sijaan, että käytettäisiin piste-estimaatteja. Priorijakaumina tässä työssä käytetään gamma- ja normaalijakaumia. Vastaavasti painotettuja jakaumia kutsutaan *posteriorijakaumiksi*, kun priorijakaumat on kiinnitetty.

Täsmällisesti siis vaikkapa koko markkinan vahinkolukumäärän \mathcal{K} ajatellaan noudattavan painotettua Poisson-jakaumaa, eli

$$(7.1) \quad P(\mathcal{K} = \kappa) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} f_L(\lambda) d\lambda,$$

kun $\kappa \in 0, 1, 2, \dots$ [1, soveltaen s. 15]. Kanoninen valinta sekä jakaumaksi L että A on juuri gamma-jakauma (bayesiläisen päättelyn kielellä gamma-jakauma

¹Malli sisältää implisiittisen oletuksen, että ensivakuuttajan portfolio on koko markkina pienoisuudessa. Todellisuudessa esimerkiksi toimialajakauma voi poiketa kansallisesta, mikä vaikuttaa siihen, ovatko edempänä johdettavat parametriestimaatit käyttökelpoisia. Toimialakohtainen suurvahinkotilasto ei havaintojen vähyden vuoksi olisi sellaisenaan hyödyllinen, mutta toimialojen eroja vahinkotiheydessä olisi mahdollista arvioida ensivakuuttajan oman kannan pienemmistä vahingoista. Samoin severiteettien jakauman A voisi kuvitella eroavan toimialojen välillä erilaisista palkkajakaumista johtuen.

on Poisson- ja Pareto-jakaumien *konjugaattipriori*). Poisson-jakauman kohdalla valinnan taustalla on se, että tällöin pistetodennäköisyys 7.1 on esitettävissä suljetussa muodossa, joka vieläpä sievenee negatiivisen binomijakauman pistetodennäköisyydeksi [1, ss. 16–17].

Mainitun sievennyksen sijaan tässä työssä on valittu lähestymistavaksi estimoida ensin parametrien λ ja α odotusarvot ja keskihajonnat ja kiinnittää jakaumat L ja A vasta simulointivaiheessa. Syynä on ennen kaikkea pyrkimys säilyttää simulaatio mahdollisimman modulaarisena, mikä mahdollistaa vaikkapa juuri näiden jakaumavalintojen vaikutusten kvantifioimisen.

Yleisesti peruste käyttää painotettuja jakaumia on se, ettei ilmiö noudata sellaisenaan painottamatonta jakaumaa. Vaikkapa Poisson-jakauman varianssi on sama kuin sen odotusarvo, mutta tässä työssä tarkasteltavan aineiston varianssi on aineiston keskiarvoa suurempi.

Koska Poisson($p\lambda$)-jakauman ensimmäinen keskusmomentti on

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = p\lambda$$

ja toinen

$$\mu_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = p\lambda + (p\lambda)^2,$$

satunnaismuuttujan K odotusarvo on

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \int_0^{\infty} e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} f_L(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \right) f_L(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} p\lambda f_L(\lambda) d\lambda = \mathbb{E}[pL] \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\mathbb{E}[K^2] = \mathbb{E}[pL] + \mathbb{E}[(pL)^2].$$

Tällöin varianssiksi saadaan

$$\begin{aligned} \text{Var}[K] &= \mathbb{E}[K^2] - \mathbb{E}[K]^2 = \mathbb{E}[pL] + \mathbb{E}[(pL)^2] - \mathbb{E}[pL]^2 \\ &= \mathbb{E}[pL] + \text{Var}[pL] = p \mathbb{E}[L] + p^2 \text{Var}[L] \end{aligned}$$

[7, soveltaen ss. 64–65]. Erityisesti asettamalla $p = 1$ saadaan priorijakauman varianssiksi

$$(7.2) \quad \text{Var}[L] = \text{Var}[K] - \mathbb{E}[L] = \text{Var}[K] - \mathbb{E}[K].$$

Painotettu Pareto-jakauma ei käyttäydy yhtä siististi: priorijakauman varianssin kasvaessa posteriorijakauman varianssin lisäksi myös sen odotusarvo kasvaa.¹

Eläkkeen maturiteetti T on mallissa stokastinen vain siinä mielessä, että se vaikuttaa korvausmenon jaksottumiseen yli ajan. Realistisemmassa mallissa tuotettaisiin ensin severiteetin sijaan yksittäinen eläkesuoritus B sopivasta jakau-

¹Lähteessä [8] on johdettu posteriorijakauman lauseke tilanteessa, jossa priorijakaumana L on gammajakauma, ja todettu, etteivät posteriorijakauman keskiarvo tai keskihajonta ole äärellisinä olemassa ilman vahinkojen katkaisua (vrt. tässä yläraja M^{jj}).

masta ja sitten kuolevuusmallin perusteella maturiteetti T . Tämä edellyttäisi kuitenkin aineistosta puuttuvia ikä- ja lukumäärätietoja korvauksensaajista. Tässä työssä tavoitteena onkin vain karkea arvio diskonttokoron vaikutuksesta.

Tässä työssä markkinaosuus p on vakio, mutta se olisi muutettavissa stokastiseksi parametrien λ ja α tavoin.

8 Aineisto

Aineistona on käytetty Tapaturmavakuutuskeskuksen jäsenyhtiöilleen toimittamaa suurvahinkotilastoa, joka kattaa sattumisvuodesta 2000 alkaen kaikki jäsenyhtiöille ilmoitetut työtapaturmavahingot, joiden diskonttaamaton odotettu korvausmeno on yli 1,5 miljoonaa euroa. Vahingoista on tilastoitu sattumisvuosi, tyyppi (ammattitauti, työ-, työmatka- tai vapaa-ajan tapaturma), osallisten lukumäärä, mahdollisten kuolleiden lukumäärä, maksetut korvaukset ja odotettavissa olevat tulevat korvaukset sekä summattuna että vuositasoisena korvaussummana.

Käytetään tuoreinta suurvahinkotilastoa vuodelta 2023. Käytössä on tilastot myös aiemmilta vuosilta 2021 ja 2022, joiden perusteella voidaan arvioida vahinkojen selviämistä: Ensinnäkin vahinkojen tietointulossa on viivettä. Toiseksi tietointulleen vahingon odotettu korvausmeno tarkentuu esimerkiksi sen mukaan, onnistuuko kuntoutus tai kouluttautuminen uuteen ammattiin. Vähennetään näiden viiveiden vaikutusta jättämällä huomioimatta aineiston kolme viimeisintä vuotta. Poistetaan lisäksi aineistosta vapaa-ajan tapaturmavahingot, koska ne korvataan vapaaehtoisesta vapaa-ajan tapaturmavakuutuksesta. Näiden rajausten jälkeen käytössä on 247 suurvahinkoa vuosilta 2000–2019.

9 Parametrien estimointi

Aineiston käsittelyssä on kaksi oleellista haastetta, joiden seurauksena yksittäisille havainnoille halutaan antaa mallinuksissa yksilölliset painokertoimet.

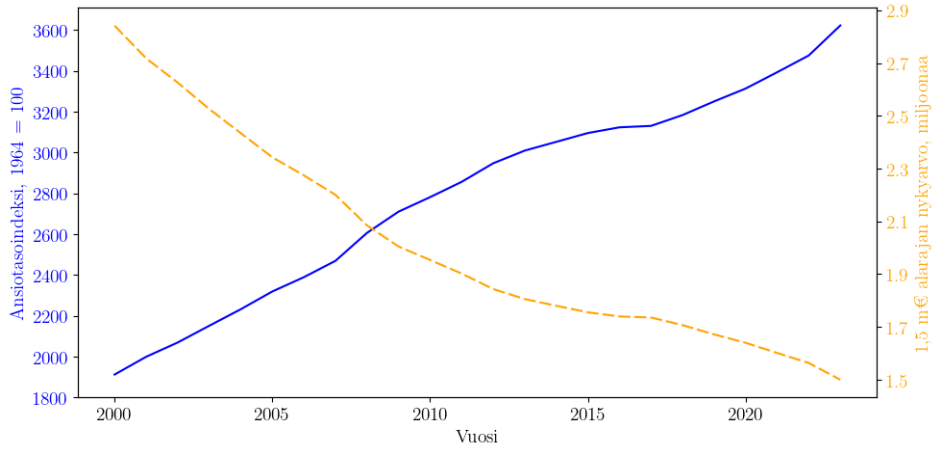
Ensinnäkin koska sekä vahinkolukumäärä että severiteetti muuttuvat ajassa, on tarve painottaa mallinuksissa tuoreempia havaintovuosia. Valitaan painoker-toimiksi

$$w_i^t = e^{-\gamma v},$$

missä v on tarkasteluvuoden ja sattumisvuoden erotus. Käytetään parametriaarvoa¹ $\gamma = 0,1$. Havainnollisesti tällöin havainnon painoarvo pienenee noin 10 % jokaista vuotta kohti, joka sen sattumisesta on kulunut.

Toinen mallinnushaaste – jatkossa *leikkautumisiongelma* – on seurausta siitä, että aineistoon on koottu vahinkoja, jotka on arvioitu yli 1,5 miljoonan euron suuruisiksi. Ansionmenetykskorvauksen tason määrää vahingonkäräsieneen ansiotasoa vahingon sattumishetkellä, joten severiteetit voidaan muuttaa vuoden 2023 tasoon ansiotasoindeksiin [9] avulla. Tällöin on huomionarvoista, etteivät eri vuosien vahingot voi olla peräisin samasta jakaumasta: nykyarvoltaan vaikkapa alle kahden miljoonan euron vahinko voi esiintyä vasta vuodesta 2010 alkaen. Kuvassa 2 on esitetty ansiotasoindeksiin kehitys ja nimellisarvoltaan 1,5 miljoonan euron alarajan nykyarvo.

¹Kyseessä on hyperparametri, joka on mahdollista optimoida sopivasti valittu tappiofunk-tio minimoimalla joko tarkasteltavan tai sitä laajemman, ensivakuuttajan kaikki vahingot sisältävän aineiston perusteella.



Kuva 2: Ansiotasoindeksin kehitys ja aineiston sattumisvuosittaiset teoreettiset pienimmät vahingot vuoden 2023 tasossa.

9.1 Parametri α

Parametrin $\alpha = E[A]$ estimoinnissa edellä kuvattu aineiston leikkautumisongelma voidaan ratkaista lisäämällä pienten vahinkojen painoa sen mukaan, kuinka monen tarkasteluvuoden alarajan alle vahingon suuruus jää. Tällöin siis vaikkapa tasan kahden miljoonan suuruinen vahinko saa painokertoimen $w^s = 2$, koska se alittaa sattumisvuosien 2000–2009 alarajat. Vastaavasti yli 2,85 miljoonan suuruisten vahinkojen painoksi jää $w^s = 1$ ja alle 1,74 miljoonan suuruisten vahinkojen paino on suurin mahdollinen, $w^s = 20$. Täsmällisesti siis vahingon Z_i paino on

$$w_i^s = \frac{20}{20 - \sum_{t=2000}^{2019} 1_{\{Z_i < c_t\}}},$$

missä c_t on vuoden t alaraja. Tämän jälkeen estimoinnissa havainnon i monikertoja sisällytetään mallinnusaineistoon $\lfloor w_i^s + \frac{1}{2} \rfloor$ kappaletta.

Kun alaraja c on tunnettu, parametrin α suurimman uskottavuuden estimaatti on

$$\hat{\alpha}_{mle} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{Z_i}{c}}$$

[10, s. 203]. Estimaatilla $\hat{\alpha}$ on useita hyviä ominaisuuksia: sen harha $n/(n-1)$ on pieni ja helposti korjattavissa, ja sen varianssi on pieni, suuruusluokkaa $\frac{\alpha^2}{n}$ [5, s. 196].

Havainnon yksilöllinen paino on mahdollista huomioida muokkaamalla uskottavuusfunktio

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}, \alpha) = \prod_{i=1}^n f_{Pareto}(Z_i; \alpha, c)$$

muotoon

$$\mathcal{L}_{tw}(\mathbf{Z}, \alpha) = \prod_{i=1}^n f_{Pareto}(Z_i; \alpha, c)^{w_i^t},$$

jolloin painotettu suurimman uskottavuuden estimaatti on

$$(9.1) \quad \hat{\alpha}_{twmle} = \arg \max_{\alpha} \mathcal{L}_{tw}(\mathbf{Z}, \alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^t}{\sum_{i=1}^n w_i^t \ln \frac{z_i}{c}}.$$

Toinen tapa huomioida havaintojen yksilölliset painot parametrin α estimoinnissa on käyttää pienimmän neliösumman menetelmää: koska Pareto-jakauman kertymäfunktio on

$$F(z) = P(Z \leq z) = 1 - \left(\frac{c}{z}\right)^{\alpha}$$

kun $z \geq c$,

$$\ln(1 - F(z)) = \alpha(\ln c - \ln z).$$

Korvaamalla $F(z)$ empiirisellä kertymällä¹

$$\hat{F}(z_i) = \frac{\sum_{j=1}^n 1_{\{z_j \leq z_i\}}}{n+1}$$

voidaan estimoida α kulmakertoimen lineaariselle mallille, jossa vastemuuttujana on $y_i = \ln(1 - \hat{F}(z_i))$ ja selittävänä muuttujana on $x_i = (\ln c - \ln z_i)$. Käytännössä empiirinen kertymä saadaan aineiston rivinnumeroista, kun havainnot z_i on järjestetty pienimmästä suurimpaan ja rivejä on monistettu painojen w^s mukaisesti. Tällöin painotetun pienimmän neliösumman mukainen estimaatti parametrille α on

$$\hat{\alpha}_{wls} = \arg \min_{\alpha} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \alpha x_i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}.$$

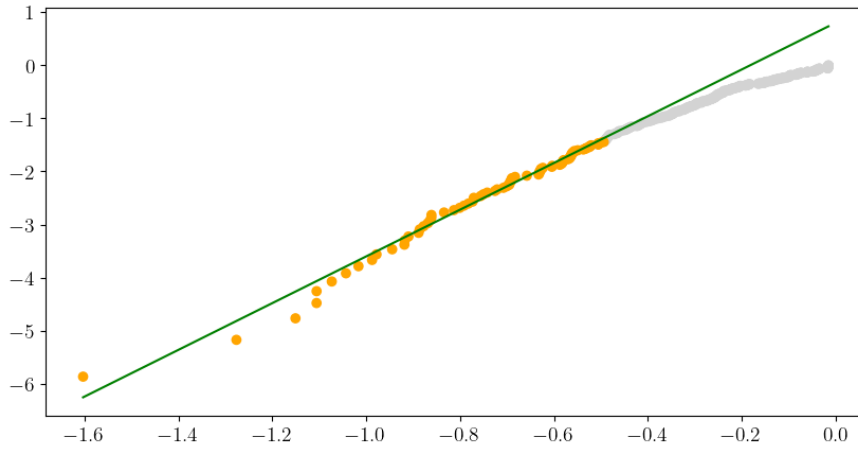
Valitsemalla pienimmän neliösumman painoiksi

$$w_i = w_i^r = \frac{1}{\ln \frac{z_i}{c}}$$

lineaarisen regression tuottama parametrin α estimaatti on asymptoottisesti (eli otoskoon kasvaessa rajatta) sama kuin parametrin α suurimman uskottavuuden estimaatti [5, s. 199]. Olkoon jatkossa $\hat{\alpha}_{wls}$ näillä painoilla laskettu pienimmän neliösumman estimaatti ja $\hat{\alpha}_{twls}$ painoilla $w_i = w_i^r w_i^t$ laskettu pienimmän neliösumman estimaatti.

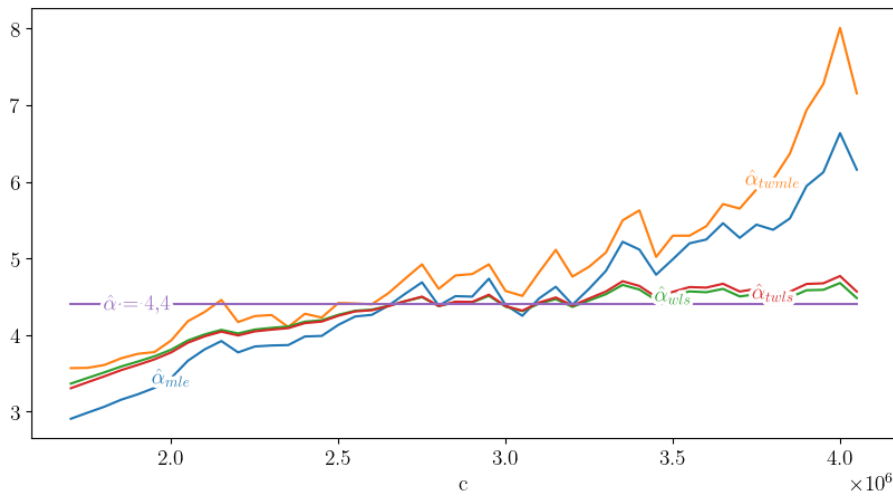
Pareto-jakauman soveltuvuutta on siis mahdollista alustavasti tutkia ns. *log-log-kvaajan* avulla, eli piirtämällä edellä määritelty pistejoukko (x_i, y_j) koordinaatistoon (kuva 3). Jos aineisto noudattaa täydellisesti Pareto-jakaumaa, tuloksena on suora. Käsillä olevan aineiston tapauksessa näin ei ole, mutta sovitusta paranevat jättämällä huomiotta kuvassa oikealla olevia pienen severeiteetin havainnot. Ratkaisu on luonteva, sillä kiinnostus kohdistuu juuri suuriin vahinkoihin. Varjopuolena estimaattien $\hat{\alpha}$ ja $\hat{\lambda}$ varianssit kasvavat.

¹Valitsemalla nimitäjäksi $n+1$ varmistetaan, että logaritmi on määritelty. Lähde [11, s. 195] käyttää korjausta $\hat{F}(z_i) = \frac{\left(\sum_{j=1}^n 1_{\{z_j \leq z_i\}}\right)^{-0.3}}{n+0.4}$.



Kuva 3: Empiirinen kertymä severeiteetin funktiona, molemmissa logaritminen asteikko.

Toinen tapa tutkia sovituksen laatua on ns. *Hillin kuvaaja* [5, mukailleen ss. 216–221]: estimoidaan parametri α vuorotellen eri alarajan c arvoilla rajatusta aineistosta. Tavoitteena on löytää alue, jolla saadut estimaatit asettuvat vaakasuuralle. Tällöin estimaatti on robusti alarajan c valinnan suhteen, kuten Paretojakaumassa kuuluu. Kuvaaja havainnollistaa myös eri estimaattien eroja – pienimmän neliösumman estimaatit säilyvät suurimman uskottavuuden estimaatteja pidempään robusteina aineistoa rajattaessa.

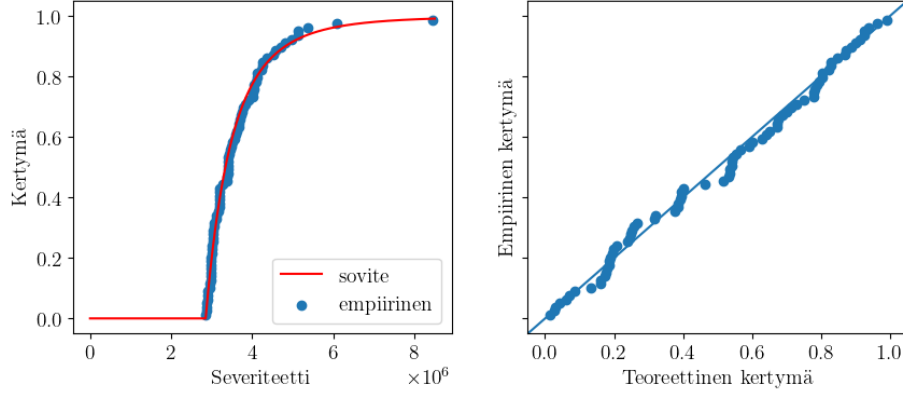


Kuva 4: Mukailtu Hillin kuvaaja: eri parametriestimaatit alarajan c arvoille.

Hillin kuvaajan perusteella $c = 2\,850\,000$ on sopiva valinta alarajaksi. Tällöin havaintoja jää jäljelle 78 kappaletta. Tällöin myös vältetään leikkautumisongelmalta parametria λ estimoitaessa.¹ Valitaan simulaation ns. perustapauksen parametriarvoksi $\hat{\alpha}_{twls} = 4,4$ ja sen keskihajonnaksi painotetun pienimmän ne-

¹Ongelma olisi mahdollista kiertää estimoimalla λ summana eri kokoluokan vahinkojen intensiteettejä.

liösunnan sovituksen tuottama parametrin keskivirhe $\sigma_\alpha = 0,17$.¹ Sovituksen laatua voi arvioida paitsi silmämääräisesti kuvan 5 perusteella myös vaikkapa Kolmogorov-Smirnov-testillä, joka antaa testisuureksi 0,0637. Otoskoolla $n = 78$ tämä vastaa p -arvoa 0,913, eli testi ei puolla lainkaan jakaumaoletuksen hylkäämistä.



Kuva 5: Empiirinen ja teoreettinen jakauma ja kvantiili-kvantiili-kuvaaja.

Sovitettaessa vaihtoehtoisena jakaumana samaan leikattuun aineistoon negatiivinen binomijakauma Kolmogorov-Smirnov-testin testisuure saa merkittävästi suuremman arvon 0,1302, mikä puoltaa Pareto-jakauman valintaa.

9.2 Parametri λ

Merkitään $\lambda = E[L]$. Yleisesti Poisson-jakauman parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaatti on

$$\hat{\lambda}_{mle} = \frac{\sum_{i=1}^n K_i}{n}.$$

Tämän pohjalta on suoraviivaista muodostaa havaintojen yksilölliset painot huomioiva estimaatti (vrt. yhtälö 9.1):

$$\hat{\lambda}_{twmle} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i K_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Estimoidaan edellä rajatusta yli 2 850 000 euron vahinkojen aineistosta perustapauksen parametriarvoksi $\hat{\lambda}_{twmle} = 3,2$ käyttämällä painoja w_i^t . Käytetään perustapauksen keskihajontana arvoa $\sigma_\lambda = 1,4$, joka saadaan yhtälön 7.2 perusteella vuosittaisen lukumääräaineiston aikapainotetusta varianssista $\hat{\sigma}_K^2 \approx 5,2$.

9.3 Estimaattien herkkyys aineiston muutoksille

Taulukkoon 3 on koottu edellä esitetyt estimaatit eri tavoin muokatuille aineistoille. Tarkasteluissa vahinkoja on lisätty tuoreimmalle sattumisvuodelle. Havaitaan, että parametrin α estimaatti on herkkä yksittäisille suurille vahingoille.

¹Kyseessä on Statsmodels-kirjaston robusti kovarianssityypin HC3 sovitus, joka sallii aineiston heteroskedastisuuden.

Muutos	λ	σ_λ	α	σ_α
-	3,2	1,7	4,4	0,17
Poistetaan suurin vahinko	3,2	1,6	4,6	0,09
Poistetaan kaksi suurinta vahinkoa	3,1	1,7	4,5	0,08
Lisätään 10 000 000 euron vahinko	3,3	1,6	3,7	0,37
Lisätään kaksi 10 000 000 euron vahinkoa	3,4	1,5	3,4	0,28
Lisätään 20 000 000 euron vahinko	3,3	1,6	2,5	1,6
Lisätään kaksi 20 000 000 euron vahinkoa	3,4	1,5	2,2	0,27

Taulukko 2: Estimaatit muunnelluille aineistoille

9.4 Korvausmenon jaksotus yli ajan

Aineiston vahingoille on mahdollista laskea odotettu maturiteetti

$$T_i = t_{obs} - t_i + \lfloor C_i/B^i + \frac{1}{2} \rfloor,$$

missä t_{obs} on aineiston tarkasteluvuosi, t_i vahingon i sattumisvuosi, C_i vahingon odotettu jäljellä oleva korvaussumma ja B^i vuosittainen korvaussumma.

Tällöin hetken t_0 kertaerä on $B_0^i = Z_i - T_i B^i$. Käytetään simulaatiossa suurelle

$$b_0^i = B_0^i/Z_i \text{ vakioarvoa } \hat{b}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n B_0^i}{\sum_{i=1}^n Z_i} \approx 0,084.$$

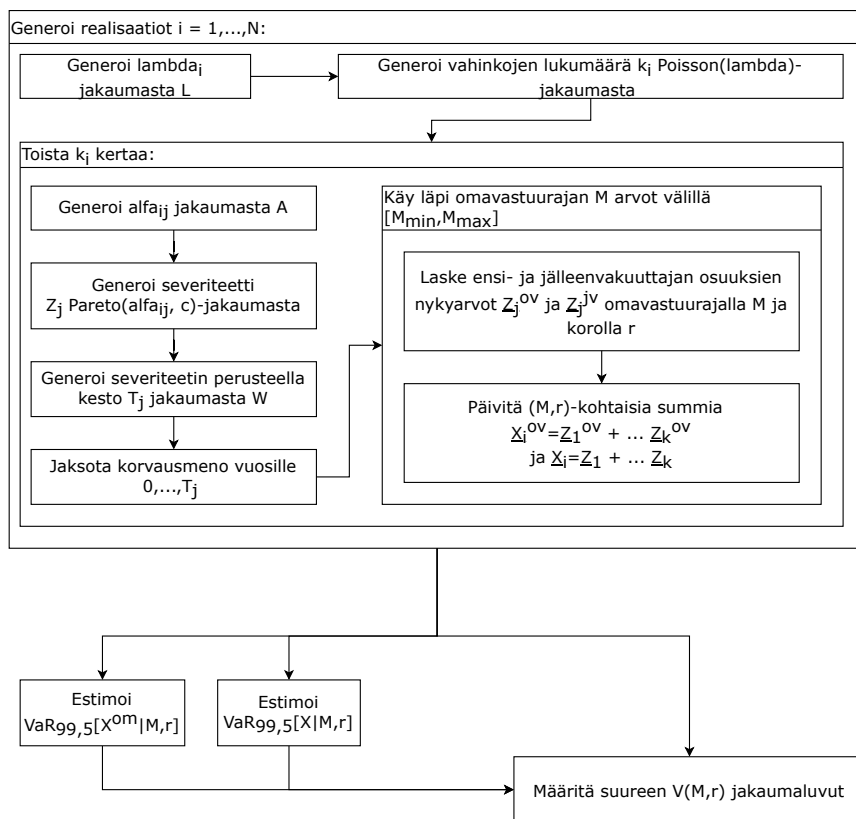
Vastaavasti käytetään simulaatiossa maturiteetille mallia

$$T_i = u + vZ_i + \epsilon,$$

missä $\epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$. Sovittamalla koko aineistoon lineaarinen malli saadaan arvot $\hat{u} \approx 36,99$, $\hat{v} \approx 0,000\ 002\ 52$ ja sovituksen keskineliövirheen neliöjuurena $\hat{\sigma}_\epsilon \approx 11,98$.

10 Simulaatiomalli

Lyhyt esitys Monte Carlo -menetelmästä löytyy lähteestä [12]. Ydinajatuksena on ratkaista deterministinen ongelma stokastisin menetelmin, siis käytännössä generoimalla tutkittavasta mallista riittävä määrä satunnaisia realisaatioita, joiden perusteella voidaan luotettavasti arvioida lopputulosten jakaumaa. Tässä työssä käytetyn simulaation rakenne on esitetty kuvassa 6. Varsinainen Python-kielillä toteutettu laskenta on liitteenä.



Kuva 6: Kaavio simulaatiosta.

11 Tulokset

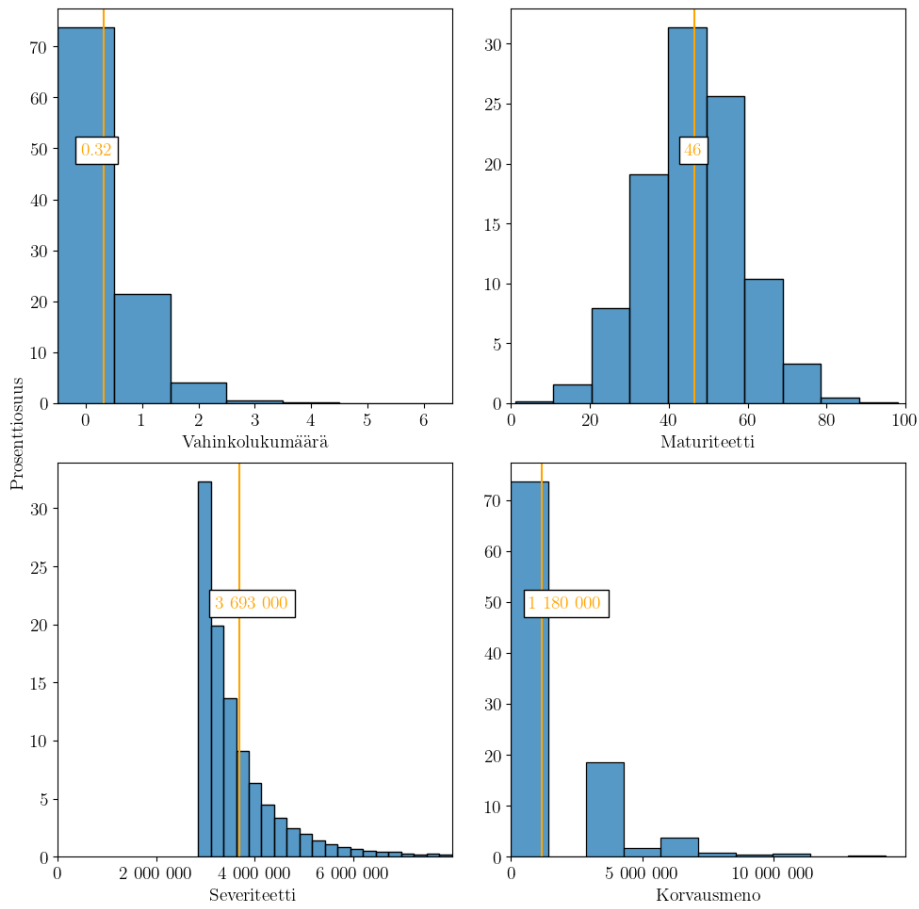
Tässä kappaleessa esitellään ensin tuloksen muodostuminen yksityiskohtaisesti ns. perusskenaariolle. Tämän jälkeen tutkitaan tuloksen herkkyyttä eri lähtöarvojen muutoksille.

11.1 Tuloksen muodostuminen

Perusskenaarion simuloimiseksi käytetään seuraavia arvoja ja priorijakaumia:

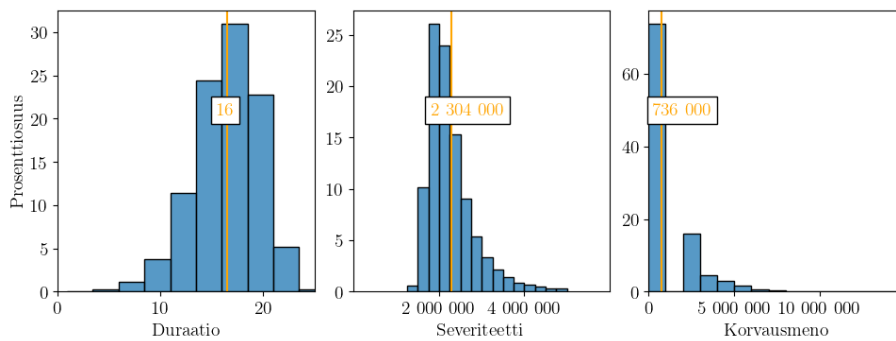
- $\lambda = 3,2$
- $\sigma_\alpha = 0,17$
- $v = 0,000\ 002\ 52$
- $\sigma_\lambda = 1,7$
- A : gammajakauma
- $\sigma_\epsilon = 11,98$
- L : gammajakauma
- $c = 2\ 850\ 000$
- $q = 0,06$
- $p = 0,1$
- $b_0 = 0,084$
- $r = 0,025$
- $\alpha = 4,4$
- $u = 36,99$

Generoidaan simulaatiossa 100 000 kappaletta realisaatioita. Perusskenaarion vahinkolukumäärien, maturiteettien ja nimellisarvoisten severiteettien ja korvausmenojen jakaumat on esitetty kuvassa 7.



Kuva 7: Simuloidut vahinkolukumäärät, maturiteetit, severiteetit ja korvausmenot keskiarvoineen.

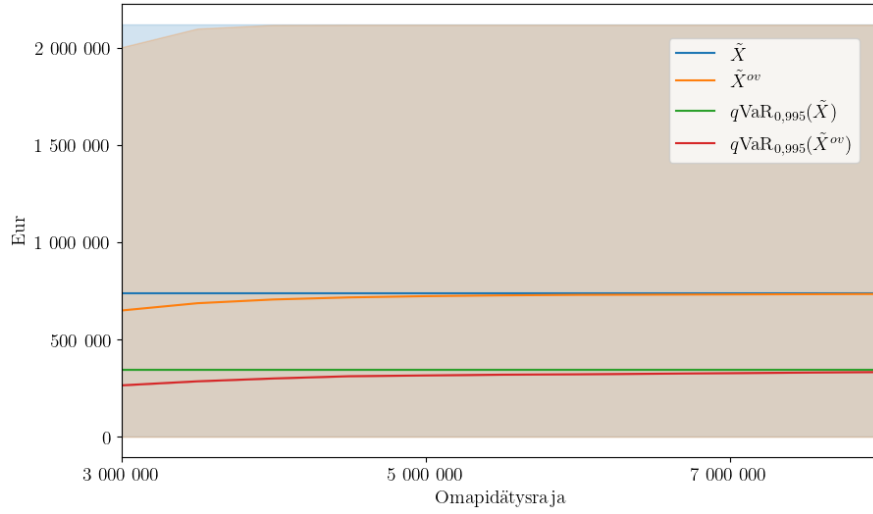
Diskonttauksen vaikutus eli perusskenaarion duraatioiden, severiteettien ja korvausmenojen nykyarvojen jakaumat on esitetty kuvassa 8.



Kuva 8: Simuloitujen vahinkojen duraatiot ja severiteettien ja korvausmenojen nykyarvot keskiarvoineen.

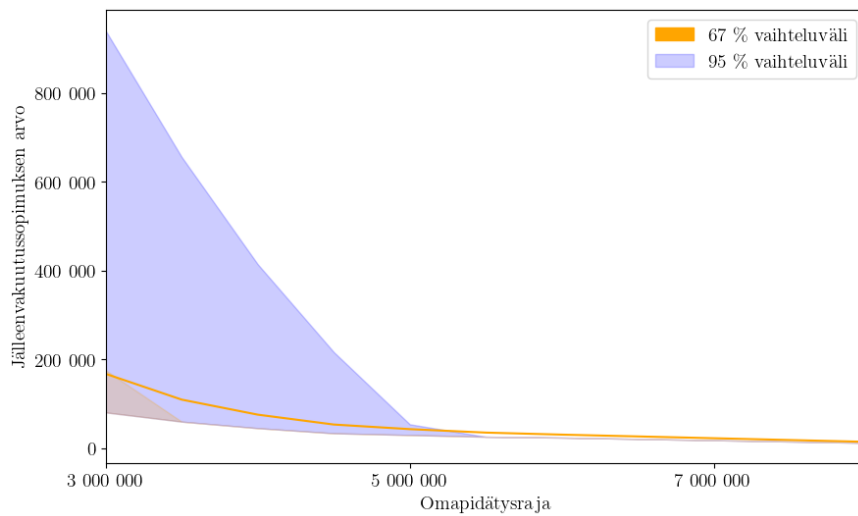
Perusskenaarion jälleenvakuutuksen arvoon vaikuttavat komponentit eri oma-

pidätysrajoilla on esitetty kuvassa 9.



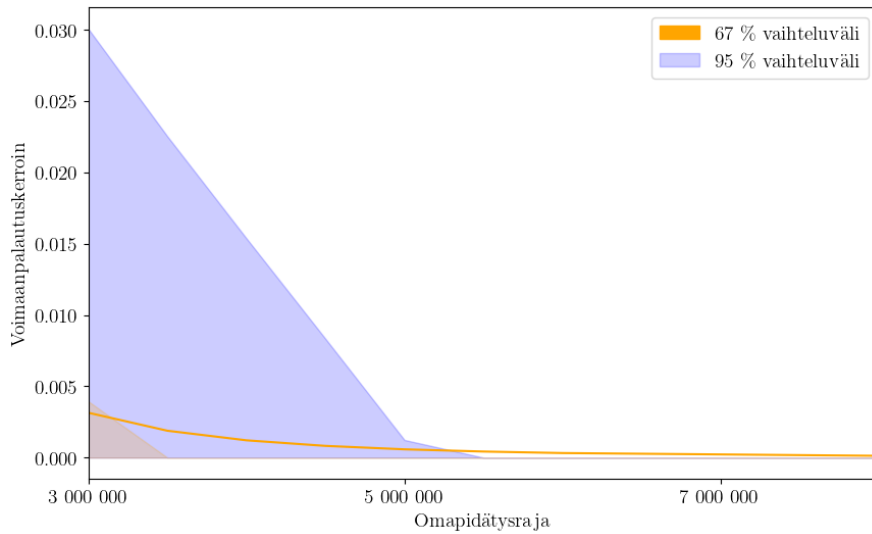
Kuva 9: Jälleenvakuutusopimuksen arvon komponentit eri omapidätysrajoilla. Korvausmenotermeille on esitetty keskiarvot ja 67 % vaihteluvälit.

Kuvan 9 tiedot yhdistämällä saadaan kuvassa 10 esitetty perusskenaarion jälleenvakuutusopimuksen arvon jakauma eri omapidätysrajoilla.



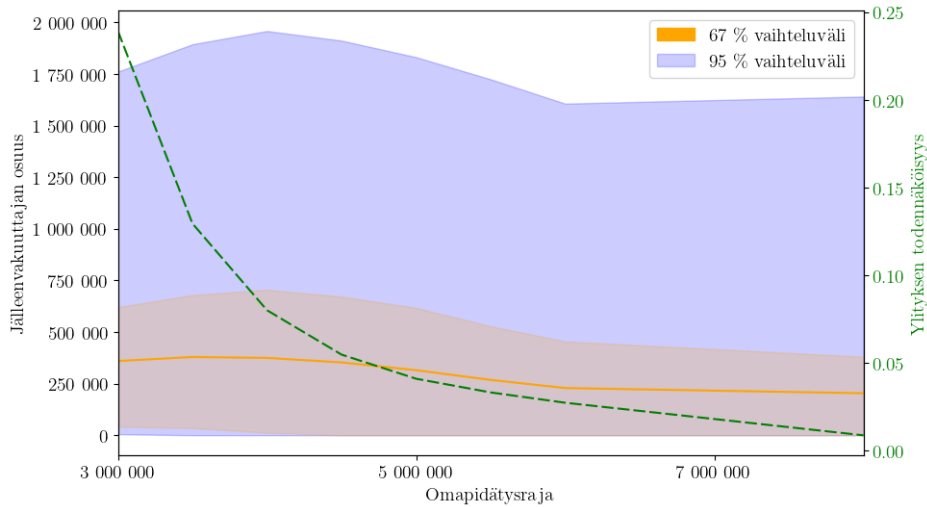
Kuva 10: Jälleenvakuutusopimuksen arvo eri omapidätysrajoilla.

Perusskenaarion voimaanpalautuskertoimen $\sum k_{vp}^i$ jakauma eri omapidätysrajoilla on esitetty kuvassa 11.



Kuva 11: Voimaanpalautuskertoimen arvo eri omapidätysrajoilla.

Kuvassa 12 on esitetty eri omapidätysrajoilla todennäköisyys sille, että omapidätysraja ylittyy ja jälleenvakuuttajan osuuden jakauma sillä ehdolla, että omapidätysraja on ylittynyt.



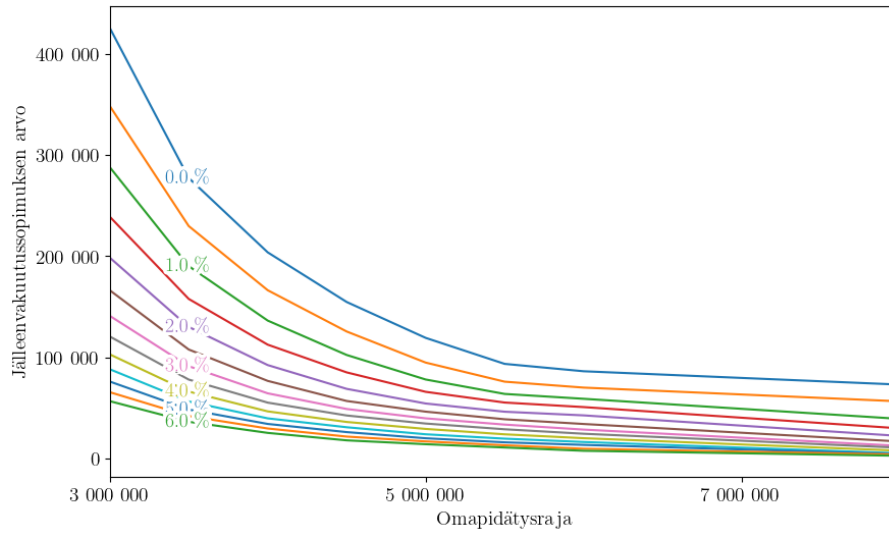
Kuva 12: Omapidätysrajan rikkoutumisen todennäköisyys ja jälleenvakuuttajan osuuden ehdollinen jakauma.

11.2 Herkkyystarkasteluja

Tämän kappaleen herkkyystarkasteluissa varioidaan simulaation lähtötietoja yksi kerrallaan. Muut tiedot ovat kohdan 11.1 mukaisia, mikäli ei toisin mainita.

Kuvassa 13 on esitetty jälleenvakuutuksen arvon keskiarvot eri diskonttoron r arvoilla. Koska korvausten maturiteetit ovat tyypillisesti kymmeniä vuosia ja koska jälleenvakuuttaja maksaa osuutensa ensivakuuttajan osuuden jälkeen,

sopimuksen arvo on herkkä käytetylle korolle.



Kuva 13: Sopimuksen odotettu arvo eri diskonttokoroilla ja omapidätysrajoilla.

Taulukkoon 3 on koottu esimerkinomaisesti sopimuksen arvon odotusarvoja ja odotusarvon komponentteja eri tavoin muunnelluilla simulaation parametrien arvoilla ja jakaumavalinnoilla. Omapidätysrajana on käytetty viittä miljoonaa euroa. Esimerkiksi odotusarvomielessä muutos on minimaalinen, kun priorijakau-
mia A ja L vaihdetaan gammajakaumasta normaalijakaumaan. Parametrien arvojen muutokset vaikuttavat odotusarvon komponentteihin odotetuilla tavoilla, mutta yhteisvaikutukset eivät aina ole intuitiivisia.

Muutos	$E[V]$	$E[\tilde{X}]$	$E[\tilde{X}^{ov}]$	$\text{VaR}_{0,995}[\tilde{X}]$	$\text{VaR}_{0,995}[\tilde{X}^{ov}]$
A: gamma	40 000	729 000	716 000	5 657 000	5 214 000
A: normaali	40 000	727 000	714 000	5 601 000	5 139 000
L: gamma	40 000	729 000	716 000	5 657 000	5 214 000
L: normaali	39 000	727 000	714 000	5 519 000	5 074 000
$\alpha = 3.6$	79 000	771 000	745 000	6 342 000	5 456 000
$\alpha = 4.0$	56 000	747 000	729 000	5 966 000	5 333 000
$\alpha = 4.4$	40 000	729 000	716 000	5 657 000	5 214 000
$\alpha = 4.8$	27 000	713 000	704 000	5 394 000	5 096 000
$\alpha = 5.2$	19 000	701 000	695 000	5 200 000	4 986 000
$\lambda = 1.6$	40 000	364 000	357 000	4 442 000	3 886 000
$\lambda = 2.4$	37 000	545 000	536 000	5 096 000	4 638 000
$\lambda = 3.2$	40 000	729 000	716 000	5 657 000	5 214 000
$\lambda = 4.0$	46 000	914 000	897 000	6 372 000	5 898 000
$\lambda = 4.8$	42 000	1 092 000	1 072 000	6 810 000	6 441 000
$\sigma_\alpha = 0.07$	39 000	728 000	716 000	5 636 000	5 205 000
$\sigma_\alpha = 0.12$	42 000	728 000	716 000	5 644 000	5 155 000
$\sigma_\alpha = 0.17$	40 000	729 000	716 000	5 657 000	5 214 000
$\sigma_\alpha = 0.22$	43 000	729 000	716 000	5 670 000	5 163 000
$\sigma_\alpha = 0.27$	45 000	729 000	716 000	5 691 000	5 161 000
$\sigma_\lambda = 0.7$	43 000	730 000	717 000	5 455 000	4 963 000
$\sigma_\lambda = 1.2$	40 000	728 000	716 000	5 460 000	5 004 000
$\sigma_\lambda = 1.7$	40 000	729 000	716 000	5 657 000	5 214 000
$\sigma_\lambda = 2.2$	38 000	729 000	717 000	5 837 000	5 418 000
$\sigma_\lambda = 2.9$	37 000	736 000	723 000	6 367 000	5 973 000

Taulukko 3: Sopimuksen arvon odotusarvoja ja odotusarvon komponentteja perusskenaarion muunnelmille.

12 Yhteenveto

Työn tavoitteena oli kehittää malli sen arvioimiseksi, millaisen taloudellisen hyödyn ensivakuuttaja saa jälleenvakuutusopimuksesta. Tarkastelu rajattiin lakisääteisen tapaturmavakuutuksen Excess of loss -jälleenvakuutukseen. Työssä käytetty simulaatiomalli rakentui malleista vahinkojen lukumäärälle, yksittäisen vahingon suuruudelle ja korvausmenon jaksotukselle yli ajan. Mallien parametrit estimoitiin vuodet 2000–2019 kattavasta suurvahinkoaineistosta.

Simulaatio tuotti eri omapidätysrajoille ensivakuuttajan vuosittaisen kokonaiskorvausmenon nykyarvon jakaumat, joiden perusteella saatiin jälleenvakuutusopimuksen arvon jakaumat. Arvostuksessa huomioitiin korvausmenon lisäksi sidotun pääoman kustannus. Edelleen tutkittiin mallin herkkyyttä parametrien ja käytettyjen jakaumien muutoksille. Merkittävin havainto oli, että jälleenvakuutusopimuksen arvo pieneni merkittävästi, kun käytetty diskonttokorko kasvoi. Tämä johtuu siitä, että jälleenvakuuttajan osuus korvauksista sijoittuu ajallisesti ensivakuuttajan osuuden jälkeen – tyypillisessä eläketilanteessa jopa vuosikymmenten päähän vahingon sattumishetkestä. Sen sijaan malli osoittautui robustiksi tutkituille jakaumavaihtoehdoille.

Eri vakuutuslajien tai jälleenvakuutusjärjestelyiden tarkastelut onnistuisivat työssä käytetyllä mallinnustavalla suoraviivaisesti. Mallia voisi kehittää edelleen ainakin kahdella tavalla: ensinnäkin korvausmenon jaksotuksen yli ajan voisi

toteuttaa henkivakuutustekniikalla generoimalla ensin yksittäisen korvaussuorituksen suuruuden ja sitten simuloimalla korvauksensaajan elinkaarta. Tämä edellyttäisi lukumäärä-, ikä- ja sukupuolitietoja korvauksensaajista, mutta tarkentaisi tuloksia ja mahdollistaisi esimerkiksi kuolevuusmuutosten vaikutuksen tutkimisen. Toiseksi ainakin suuremman vakuutusyhtiön olisi mahdollista mallintaa oman datansa perusteella sekä vahinkotiheyttä että korvausmenoa toimialakohtaisesti, jolloin arvioissa voisi huomioida erot oman kannan ja koko maan kattavan aineiston välillä. Lisäksi olisi mahdollista kehittää simulaatiota niin, että algoritmi keskittyisi iteratiivisesti jakauman häntään, jolloin pääomakustannuksen laskennassa käytetty $\text{VaR}_{0,995}$ -riskimitta tarkentuisi ilman simulaatiokierrosten lukumäärän kohtuutonta lisäystä.

Lähteet

- [1] Nyrhinen, H.: Riskiteoria. Helsingin yliopiston luentomoniste (2011). <https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/70226728/rt11.pdf?version=1&modificationDate=1320492260748&api=v2>
- [2] Työtäpaturma- ja ammattitautilaki (459/2015). <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2015/20150459>
- [3] Sweeting, P.: Financial Enterprise Risk Management. Cambridge University Press (2011).
- [4] Komission delegoitu asetus (EU) 2015/35, ELI: http://data.europa.eu/eli/reg_del/2015/35/2022-08-02
- [5] Nair, J., Wierman, A. ja Zwart, B.: The Fundamentals of Heavy Tails – Properties, Emergence, and Estimation. Cambridge University Press (2022).
- [6] Sihvonen, P.: MCMC. SHV-työ (2007). https://www.actuary.fi/julkaisut/shv-tyot/mcmc/87_Pekka_Sihvonen.pdf
- [7] Wilmot, G.: Mixed Compound Poisson Distributions. ASTIN Bulletin, 16(S1), S59–S79 (1986). DOI: 10.1017/S051503610001165X
- [8] McNulty, G.: The Pareto-Gamma Mixture. Casualty Actuarial Society E-Forum (2021). https://www.casact.org/sites/default/files/2023-03/McNulty_The_Pareto_Gamma_Mixture_EForum-Spring2021.pdf
- [9] Ansiotasoindeksi, tilastokeskus. https://pxdata.stat.fi/PxWeb/pxweb/fi/StatFin/StatFin_ati/statfin_ati_pxt_122j.px/
- [10] Rytgaard, M.: Estimation in the Pareto Distribution. ASTIN Bulletin, 20(2), 201–216 (1990). DOI: 10.2143/AST.20.2.2005443
- [11] Lu, HL., Tao, SH.: The Estimation of Pareto Distribution by a Weighted Least Square Method. Qual Quant 41, 913–926 (2007). DOI: 10.1007/s11135-007-9100-8
- [12] Sawilowsky, S.: You Think You’ve Got Trivials? Journal of Modern Applied Statistical Methods Vol. 2, Iss. 1, Article 21 (2003). DOI: 10.22237/jmasm/1051748460

Liite: Ohjelmakoodi

Ohjelmakoodi on testattu toimivaksi Python-kielen versiolla 3.10.9. Erikseen versioituvista kirjastoista on käytetty seuraavia: scipy 1.10.0, numpy 1.23.5 ja pandas 1.5.3.

```
import scipy.stats as scs
import numpy as np
import math
import pandas as pd
import warnings
import random

#PARETO - alpha on muotoparametri, c skaalaparametri (alaraja)

# odotusarvo
def mean_pareto(alpha, c):
    return alpha*c/(alpha-1)

# tiheys
def pdf_pareto(alpha,c,x):
    if x > c:
        p = alpha*c**alpha/x**(alpha+1)
    else:
        p = 0
    return p

# kertymä
def cdf_pareto(alpha,c,x):
    if x > c:
        s = 1 - (c/x)**alpha
    else:
        s = 0
    return s

#tiheys vektorille arvoja
def pdf_pareto_vector(alpha, c, v):
    u = v.copy()
    for index, item in enumerate(v):
        u[index] = pdf_pareto(alpha, c, item)
    return u

# kertymä vektorille arvoja
def cdf_pareto_vector(alpha,c,v):
    u = v.copy()
    for index, item in enumerate(v):
        u[index] = cdf_pareto(alpha, c, item)
    return u

# kertymäfunktion käänteisfunktio
def inverse_cdf_pareto(alpha,c,u):
    t = c/((1-u)**(1/alpha))
    return t
```

```

#otos
def pareto_sample(alpha,c,n):
    v = np.empty(n)
    r = np.random.random(n)
    for index, item in enumerate(r):
        p = inverse_cdf_pareto(alpha,c,item)
        v[index] = p
    return v

#yksittäinen satunnaisluku
def rand_pareto(alpha, c):
    r = np.random.random()
    p = inverse_cdf_pareto(alpha,c,r)
    return p

#suurimman uskottavuuden estimaatti
def mle_pareto_alpha(sarake,c):
    lkm = len(sarake)
    alpha = lkm/sum(np.log(sarake/c))
    return alpha

#POISSON - lam on intensiteetti (odotusarvo)

# tiheys
def pdf_poisson(n, lam):
    p = np.exp(-lam)*lam**n/np.math.factorial(n)
    return p

# kertymä
def cdf_poisson(m, lam):
    p = np.exp(-lam)
    s = p
    for n in range(1,m+1):
        p = p*lam/n
        s = s + p
    return s

# kertymäfunktion käänteisfunktio
def inverse_cdf_poisson(lam, cdf_value):
    n = 0
    p = np.exp(-lam)
    s = p
    while True:
        if s > cdf_value:
            break
        else:
            n = n+1
            p = p*lam/n
            s = s + p
    if n == 0:
        return n
    else:

```

```

        return n-1

#satunnaisluku
def rand_poisson(lam):
    n = 0
    p = np.exp(-lam)
    s = p
    u = random.random()
    while u > s:
        n = n+1
        p = p*lam/n
        s = s + p
    return n

#gammajakauman parametrien yhteydet
def gamma_params(mean, var):
    shape = mean**2/var #nyrhisen r
    rate = mean/var #nyrhisen alfa
    scale = var/mean #1/rate
    return {'shape': shape, 'scale': scale, 'rate': rate}

#VaR - järjestää datan pienimmästä suurimpaan ja palauttaa arvon
↳ jakauman kohdasta perc
def value_at_risk(data, perc=0.995):
    s = data.sort_values().reset_index(drop=True)
    index = min(round(len(s)*perc), len(s)-1)
    value = s[index]
    return value

#pyöristys
def myround(x, base=1):
    return base * round(x/base)

# jaksotus kassavirraksi
def kassavirta(sev, W='linear', u_const=30, b0=0.084, u=36.99,
↳v=0.00000252, sigma_eps=11.98):
    if W=='linear':
        T = myround(min(120,max(1, u + v*sev + np.random.
↳normal(0, sigma_eps))))
    elif W=='constant':
        T = myround(u_const)
        B = myround((1-b0)*sev/T)
        B0 = sev - B*T
    return {'Z': sev, 'T': T, 'B0': B0, 'B': B}

# jako ensi- ja jälleenvakuuttajan osuuksiin
def kassavirta_split(kassavirta, M, Mjj=75000000):
    kassavirta_local = kassavirta.copy()
    Z = kassavirta_local['Z']
    T = kassavirta_local['T']
    B0 = kassavirta_local['B0']
    B = kassavirta_local['B']

```

```

if B > 0:
    T_jv = max(0, min(T, math.ceil((M-B0)/B)))

#nollan suuruiset kassavirrat
else:
    T_jv = T

#kaikki ensivakuuttajan kontolla
if Z < M:
    B_T_jv_ov = B

#jako ensi- ja jälleenvakuuttajille
else:
    #jaetaan 1. maksuerä
    if T_jv == 0:
        B_T_jv_ov = M

    #jaetaan myöhempi erä
    else:
        B_T_jv_ov = M - B0 - (T_jv-1)*B

kassavirta_local['M'] = M
kassavirta_local['T_jv'] = T_jv
kassavirta_local['B_T_jv_ov'] = B_T_jv_ov
return kassavirta_local

# kassavirran nykyarvo
def split_nykyarvo(split, r=0.025):
    split_local = split.copy()
    Z = split_local['Z']
    T = split_local['T']
    B0 = split_local['B0']
    B = split_local['B']
    T_jv = split_local['T_jv']
    B_T_jv_ov = split_local['B_T_jv_ov']
    if r == 0:
        pv_total = Z
    else:
        pv_total = B0 + B/r*(1-1/(1+r)**T)

    if T_jv == 0:
        pv_ov = B_T_jv_ov
    else:
        if r == 0:
            pv_ov = B0 + B*(T_jv - 1) + B_T_jv_ov
        else:
            pv_ov = B0 + B/r*(1-1/(1+r)**(T_jv - 1)) + B_T_jv_ov/
            ↪(1+r)**T_jv

    split_local['r'] = r
    split_local['pv_total'] = myround(pv_total, base=0.01)

```

```

split_local['pv_ov'] = myround(pv_ov, base=0.01)

return split_local

#lambdojen ja alfojen generointi
def parametrijakauma(mean, std, dist, n_sim):

    min_val = 0.1

    if dist == 'normal':
        a = scs.norm.rvs(loc=mean, scale=std, size=n_sim,
↳random_state=None)
        a[a < min_val] = min_val

    elif dist == 'gamma':

        gamma_params = gamma_params(mean, std**2)
        shape = gamma_params['shape']
        scale = gamma_params['scale']

        a = scs.gamma.rvs(a=shape, loc=0, scale=scale,
↳size=n_sim, random_state=None)
        a[a < min_val] = min_val

    elif dist == 'constant':
        a = mean*np.ones(n_sim)

    return a

#funktio voimaanpalautusmaksua varten
def f_k_vp(Z, m, Mjj):

    with warnings.catch_warnings(record=True) as w:
        if m < Mjj:
            try:
                k_vp = (min(Z, Mjj)-min(Z, m))/(Mjj - m)

            except:
                k_vp = 0

        else:
            k_vp = 0

        if len(w) > 0:
            print(Z, m, k_vp)
    return k_vp

#nykyarvo
def nykyarvo(Z, r, T, B0, B):
    if r == 0:
        pv_total = Z
    else:

```



```

        pv_total = B0 + B/r*(1-1/(1+r)**T)

    return pv_total

#duraatio
def duraatio(Z, r, T, B0, B):

    if math.isnan(T):
        return math.nan

    else:
        pv_total = nykyarvo(Z, r, T, B0, B)

        s = 0
        for i in range(int(T)):
            t = i + 1
            q = t*B/((1+r)**t)
            s = s + q

        if pv_total == 0:
            return math.nan
        else:
            return s/pv_total

# monte carlo
def mc(p, lam, sigma_lam, L, c, alfa, sigma_alfa, A, n_sim,
      ↪m_values, r_values, debug=False, Mjj=75000000, W='linear',
      ↪u_const = 30, b0=0.084, u=36.99, v = 0.00000252, sigma_eps =
      ↪11.98):
    l = p*parametrijakauma(lam, sigma_lam, L, n_sim)
    a = parametrijakauma(alfa, sigma_alfa, A, n_sim)

    # suorituskykyystä aggregointi ilman pandas-kirjastoa
    mr_agg_n_sim = []
    mr_agg_m = []
    mr_agg_r = []
    mr_agg_z = []
    mr_agg_pv_total = []
    mr_agg_pv_ov = []
    mr_agg_k_vp = []

    m_scale = len(m_values)
    r_scale = len(r_values)

    debug_pool = []
    cc_pool = []

    for i in range(n_sim):

        index_step = m_scale*r_scale

        # indeksi simulaatiokierroksen ensimmäiseen ruutuun

```

```

if i == 0:
    i_agg_base = 0

i_agg = i_agg_base*index_step

_lam = l[i]
_alfa = a[i]

claim_count = rand_poisson(_lam)
cc_pool.append(claim_count)

severities = pareto_sample(_alfa, c, claim_count)
severities[severities>Mjj] = Mjj

if claim_count == 0:
    severities = [0]

# yksittäinen vahinko
for j, sev in enumerate(severities):

    #vahinko kassavirraksi
    kv = kassavirta(sev, W, u_const, b0, u, v, sigma_eps)

    #severiteetti debug -tauluun:
    if debug:
        debug_pool.append({'n_sim': i, 'claim_count': claim_count,
        ↪ 'j': j, 'Z': sev, 'T': kv['T'], 'BO': kv['BO'],
        ↪ 'B': kv['B']})

    # käsittely eri katkaisurajoilla

    for i_m, m in enumerate(m_values):

        #indeksi m-kierroksen ensimmäiseen ruutuun
        i_agg_m = i_agg + i_m*r_scale

        # kassavirta ensi- ja jälleenvakuuttajille
        split = kassavirta_split(kv, m)

        # voimaanpalautusmaksukerroin
        k_vp = f_k_vp(sev, m, Mjj)
        split['k_vp'] = k_vp

        # käsittely eri koroille
        for i_r, r in enumerate(r_values):

            #indeksi r-kierroksen mukaiseen ruutuun
            i_agg_mr = i_agg_m + i_r

            #nykyarvon laskenta
            nykyarvo = split_nykyarvo(split, r)

```

```

pv_total = nykyarvo['pv_total']
pv_ov = nykyarvo['pv_ov']

# aggregoinnit yli vahinkojen (n_sim, m, r)
↳ -tasolle

if j == 0:
    mr_agg_n_sim.append(i)
    mr_agg_m.append(m)
    mr_agg_r.append(r)

    mr_agg_z.append(sev)
    mr_agg_pv_total.append(pv_total)
    mr_agg_pv_ov.append(pv_ov)
    mr_agg_k_vp.append(k_vp)

else:
    mr_agg_z[i_agg_mr] += sev
    mr_agg_pv_total[i_agg_mr] += pv_total
    mr_agg_pv_ov[i_agg_mr] += pv_ov
    mr_agg_k_vp[i_agg_mr] += k_vp

if claim_count > 0:
    i_agg_base += 1

#aggregaatit
agg = {
    'n_sim': mr_agg_n_sim,
    'm': mr_agg_m,
    'r': mr_agg_r,
    'X': mr_agg_z,
    'pv_X': mr_agg_pv_total,
    'pv_X_ov': mr_agg_pv_ov,
    'k_vp': mr_agg_k_vp
}
agg_df = pd.DataFrame(agg)

r = {'agg_df': agg_df}

if debug:
    debug_df = pd.DataFrame(debug_pool)
    r['debug_df'] = debug_df
    r['cc_pool'] = cc_pool
return r

#arvon komponentit
def add_vals(df, q=0.06):

    g = df.groupby(['m', 'r'])
    df['VaR995_pv_X_ov'] = g['pv_X_ov'].transform(lambda x:
↳value_at_risk(x, perc=0.995))
    df['VaR995_pv_X'] = g['pv_X'].transform(lambda x:
↳value_at_risk(x, perc=0.995))

```

```

df['delta_pv'] = df['pv_X'] - df['pv_X_ov']
df['delta_VaR'] = df['VaR995_pv_X'] - df['VaR995_pv_X_ov']
df['V'] = df['delta_pv'] + q*df['delta_VaR']
df['cc'] = q*df['VaR995_pv_X']
df['cc_ov'] = q*df['VaR995_pv_X_ov']

return df

#lähtöarvot

#poisson
lam = 3.2
sigma_lam = 1.7
L = 'gamma'

#markkinaosuus
p = 0.1

#pareto
alfa = 4.4
sigma_alfa = 0.17
c = 2850000
A = 'gamma'

#jaksotus yli ajan
b0 = 0.084
u = 36.99
v = 0.00000252
sigma_eps = 11.98
W = 'linear'

#pääoman kustannus
q = 0.06

#toistojen lkm simulaatiossa
n_sim = 100000

#omapidätysrajat
m_values = [30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 80, 100, 120, 160, 200]
m_values = [x * 100000 for x in m_values]

#korko
r_values = [0.025]

#Perusskenaario
e = mc(p, lam, sigma_lam, L, c, alfa, sigma_alfa, A, n_sim, u
      ↪m_values, r_values)
f=e['agg_df']
h = add_vals(f)

```