Korvausvastuun arviointi kredibiliteettimenetelmin

Suppea SHV-työ

Petter Meyer
24. huhtikuuta 2024

Abstract

In Sari Ropponen's SHV-thesis 'Kollektiivinen korvausvastuu' the calculation of IBNR-reserves is described using various methods. In this paper, the calculation of IBNR-reserves is expanded to include credibility methods, which are not addressed in Ropponen's thesis. The purpose of this paper is, in addition to presenting the theory, to provide the reader with examples, so that practical implementation of the methods presented is effortless.

The beginning briefly covers credibility theory and Bühlmann's model. Following this, three methods based on credibility theory are presented for calculating IBNR-reserves based on a run-off triangle. A run-off triangle, also known as a claims triangle, is a tool to track the development of insurance claims over time. The methods presented are De Vylder's method, Hadidi's method, and Mack's method. For each method, the model is discussed in general, and additionally, how estimation of required parameters can be performed.

In the final chapter of the paper, the amount of IBNR-reserves is calculated using the methods presented earlier. Every method is using the same run-off triangle as its input data. The calculations are detailed so that the reader can easily apply the theory presented earlier in practice. Finally, the results obtained from different methods are compared with each other.

From the examples in the paper, it is noticeable that different methods yield results that are close to each other. However, Hadidi's method provides the insurance company with means to conduct sensitivity analyses of IBNR-reserves using credibility methods.

Sisällys

1 Kredibiliteettiteoria **1**
1.1 Johdatus kredibiliteettiteoriaan 1
1.2 Bühlmannin mallit 2
1.2.1 Bühlmannin tasapainoinen malli 2

2 Korvausvastuun laskenta kredibilitettimenetelmien avulla **4**
2.1 De Vylderin menetelmä 5
2.1.1 Taustaoletukset ja mallin selitys 5
2.1.2 Parametrien estimointi 6
2.2 Hadidin menetelmä 7
2.2.1 Taustaoletukset ja mallin selitys 7
2.3 Mackin menetelmä 8
2.3.1 Taustaoletukset ja mallin selitys 8
2.3.2 Parametrien estimointi 10

3 Esimerkkejä korvausvastuun arvioinnista **11**
3.1 De Vylderin menetelmä 11
3.2 Hadidin menetelmä 14
3.3 Mackin menetelmä 17
3.4 Loppusanat 20

Luku 1

Kredibiliteettiteoria

1.1 Johdatus kredibiliteettiteoriaan

Vakuutusmaksua B_i voi osittaa kolmeen eri osaan: riskimaksuun P_i, kuormituskertoimeen Λ_i ja kulukertoimeen E_i:

$$B_i(t) = P_i(t) + \Lambda_i(t) + E_i(t). \tag{1.1}$$

Alaindeksi i viittaa riskiluokkaan tai vakuutusryhmään, jolle vakuutusmaksu lasketaan ja t on mukana muistutuksena siitä, että kukin osatekijä voi olla ajasta riippuvainen. Kuormituskerroin on vakuutusyhtiön laskema turvamarginaali, joka usein perustuu korvausmenon keskihajontaan tai varianssiin. Kulukerroin on vakuutetulle ositettu osuus yhtiön toiminnan järjestämiseen aiheutuvista kustannuksista. Riskimaksun pitäisi teoriassa vastata kokonaiskorvausmenon odotusarvoa, eli

$$P_i(t) = \mathbb{E}[X_i(t)]. \tag{1.2}$$

Vakuutusyhtiö voi arvioida yksittäisen vakuutusryhmän korvausmenoa käyttämällä vakuutusryhmän omaa tilastoaineistoa toteutuneista vahingoista. Käytettävissä on kuitenkin usein laajempi tilastoaineisto joukolle ryhmiä, jotka ovat luonteeltaan samantyylisiä sen ryhmän kanssa, jolle hinta lasketaan. Riskimaksun määrittelyssä on olemassa kaksi ääripäätä. Toisaalta voidaan ajatella, että veloitetaan suoraan sama maksu kaikilta verrokkiryhmien jäseniltä perustuen ryhmien yhteiseen keskiarvoon $\bar{X}$. Tämä on perusteltua, jos ryhmät ovat keskenään homogeenisiä, eli kaikilla ryhmillä on sama odotettu korvausmeno. Jos näin ei ole, niin riskinä on, että oikeasti matalariskisemmät asiakkaat siirtävät vakuutuksiaan muualle jättäen vakuutuksenantajalle ainoastaan riskisempiä asiakkaita. Toisena ääripäänä hinnoittelu voisi suoraan perustua ryhmän j oman vahinkohistorian keskiarvoon $\bar{X}_j$. Tämä on perusteltua verrokkiryhmien ollessa heterogeenisiä, mutta haittapuolena on, että tarvitaan paljon tilastoaineistoa yksittäisestä ryhmästä. Kompromissina on jo 1900-luvun alusta yleisesti peritty tariffia, joka perustuu yllä mainittujen ääripäiden painotettuun keskiarvoon:

$$z_j \bar{X}_j + (1 - z_j)\bar{X}. \tag{1.3}$$

Kredibiliteettikerroin z_j kertoo, kuinka uskottava ryhmän omaan vahinkohistoriaan perustuva keskiarvo on. On usein perusteltua käyttää kaavan (1.3) mukaista kredibiliteettimaksua, sillä vakuutuskanta on harvoin täysin homogeeninen tai heterogeeninen. Tietyn ryhmän j riskissä on yhtäläisyyksiä verrokkiryhmien riskiin, mutta siihen liittyy myös ryhmälle täysin ainutlaatuisia piirteitä. Kredibiliteetti-kerrointa z_j valittaisiin lähellä ykköstä, jos ryhmästä olisi paljon tilastoaineistoa, ryhmän omat havainnot eivät heiluisi paljon, mutta toisaalta ryhmien välillä olisi paljon heiluntaa.

1.2 Bühlmannin mallit

Kredibiliteettikerrointa z_j voi arvioida käyttämällä Bühlmannin malleja. Mallit perustuvat keskineliövirheen minimoimiseen ja myöhemmin esiteltävät korvausvastuun arvioinnin menetelmät perustuvat samanlaiseen ajatteluun. Havainnollistetaan ajatusta yksinkertaisen esimerkin kautta. Olkoon X ja Y kaksi satunnaismuuttujaa ja u ja k näiden satunnaismuuttujien odotetut keskineliövirheet. Muodostetaan satunnaismuuttujista painotettu keskiarvo $a = zX + (1-z)Y$. Painotetun keskiarvon odotettu keskineliövirhe on $w = z^2 u + (1-z)^2 k$. Millä muuttujan z arvolla saadaan w mahdollisimman pieneksi? Derivoidaan funktio w, jolloin saadaan $2zu + 2(1-z)k$. Asettamalla derivaatta nollaksi saadaan $z = \frac{k}{u+k}$ ja $1 - z = \frac{u}{k+u}$. Satunnaismuuttujaa X painotetaan siis sitä enemmän, mitä satunnaismuuttujan Y keskineliövirhe selittää satunnaismuuttujien X ja Y yhteenlaskettua keskineliövirhettä.

1.2.1 Bühlmannin tasapainoinen malli

Bühlmannin tasapainoisessa mallissa oletetaan, että vakuutusliike on portfoliossa samansuuruista vuodesta toiseen. Bühlmann-Straubin malli on Bühlmannin tasapainoisesta mallista muunnos, jossa vakuutusliike voi heilahdella eri vuosien välillä.

Bühlmannin mallilla pyritään ennustamaan vielä havaitsematonta korvauksen määrää $X_{j,t+1}$ lineaarisena yhtälönä historian datasta siten, että keskineliövirhe on mahdollisimman pieni. Voidaan osoittaa, että keskineliövirhettä minimoiva lineaariyhtälö on muotoa

$$z\bar{X}_j + (1 - z)\bar{X}, \tag{1.4}$$

missä paras kredibiliteettikerroin saadaan yhtälöstä

$$z = \frac{aT}{aT + s^2}. \tag{1.5}$$

$\bar{X}$ on tässä koko aineiston keskiarvon estimaatti ja $\bar{X}_j$ yksittäisen vakuutusryhmän keskiarvon estimaatti. Parametri s^2 mittaa ryhmän sisäistä heiluntaa, parametri a sopimusten välistä heiluntaa ja T on tietyn vakuutusryhmän toteutuneiden vakuutusjaksojen lukumäärä. Muuttujia $\bar{X}$ ja $\bar{X}_j$ sekä parametreja s^2 ja a pitää estimoida tilastoaineiston perusteella.

Pohditaan hieman, miten T, a ja s^2 vaikuttavat kredibiliteettikertoimeen z. Jos T kasvaa rajatta, niin $z \to 1$. Tämä tarkoittaa, että mitä suurempi tilastoaineisto meillä on yksittäisestä vakuutusryhmästä, niin sitä enemmän voimme luottaa ryhmän omaan korvaushistoriaan. Jos ryhmien välinen varianssi a lähestyy nollaa, niin z lähestyy myös nollaa. Tulkinta on, että tilanteessa, jossa ryhmien välinen heilunta on pientä, niin vakuutusportfoliossa ei esiinny heterogeenisyyttä. Tällöin on perusteltua periä samaa maksua kaikilta vakuutusryhmiltä. Jos toisaalta a kasvaa rajatta, niin $z \to 1$. Tällaisessa tilanteessa yhden vakuutusryhmän korvaushistoria ei anna informaatiota toisen vakuutusryhmän riskeistä, jolloin on perusteltua periä vakuutusryhmän omaan korvaushistoriaan pohjautuvaa maksua. Jos sopimusten sisäinen varianssi s^2 kasvaa rajatta, niin $z \to 0$. Sopimusten sisäinen varianssi kasvaa, jos vakuutusryhmän omat havaitut korvaukset heilahtelevat historiassa paljon. Tällöin ei voida luotettavasti arvioida oikeaa riskimaksun tasoa yksilöllisen historian perusteella.

Luku 2

Korvausvastuun laskenta kredibilitettimenetelmien avulla

Vakuutusyhtiön korvausvastuu voidaan arvioida kolmiomenetelmien avulla, jolloin korvausten selviämistä kuvataan korvauskolmioina taulukoituna sattumis- ja kehitysvuosien mukaan. Korvauksia voidaan esittää inkrementaalisina tai kumulatiivisina käytettävästä menetelmästä riippuen.

Kehitysvuosi $j \quad \longrightarrow$

Sattumisvuosi i	1	2	3	...	$J-1$	J
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	$X_{1,3}$	...	$X_{1,J-1}$	$X_{1,J}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,3}$	...	$X_{2,J-1}$	
.	.	.				
.	.	.				
$I-1$	$X_{I-1,1}$	$X_{i-1,2}$				
I	$X_{I,1}$					

Kolmiomenetelmissä arvioidaan korvauskolmioiden tuntemattomat alkiot toteuneiden alkioiden perusteella. Tässä luvussa käydään läpi kolme kolmiomenetelmää, jossa korvausvastuu lasketaan kredibiliteettimenetelmien avulla. Menetelmiä varten otetaan käyttöön merkinnät

$$T_i = \{j | X_{i,j} \text{ on tunnettu ja } i \text{ kiinnitetty}\}$$

ja

$$K_j = \{i | X_{i,j} \text{ on tunnettu ja } j \text{ kiinnitetty}\}.$$

T_i on siis selviämiskolmion rivin i tunnetuista alkioista koostuva vektori ja vastaavasti K_j selviämiskolmion sarakkeen j tunnetuista alkioista koostuva vektori. Merkitään lisäksi $X_i = (X_{i,1}, ..., X_{i,j})^J$, missä $X_{i,u}$ on sattumisvuoden i ja kehitysvuoden u tunnettu vahinkomeno. X_i on siis selviämiskolmion sattumisvuoden i vahinkomenorivi.

2.1 De Vylderin menetelmä

2.1.1 Taustaoletukset ja mallin selitys

Kredibiliteettimenenetelmillä pyritään hallitsemaan vakuutusportfolion heterogeenisyyttä olettamalla, että taustalla on struktuurimuuttuja Θ. Menetelmissä katsotaan korvausmäärää kuvaavan muuttujan $X_{i,j}$ ehdollista jakaumaa sen jälkeen, kun struktuurimuuttuja on kiinnitetty. De Vylderin menetelmässä oletetaan, että jakauma X_i riippuu moniulotteisesta parametrista θ_i, joka on struktuurimuuttujan Θ_i tuntematon realisaatio. Oletuksina on lisäksi:

Oletus 1 *Sattumisvuosien riippumattomuus:* Vektoriparit $(\Theta_1, X_1), ..., (\Theta_j, X_j)$ ovat riippumattomia toisistaan.

Oletus 2 *Tulo-oletus jokaiselle sattumisvuodelle* $i = 1, ..., I$*:* X_i voidaan esittää muodossa $X_i = Y_i\beta(\Theta_i)$, missä $Y_i = (Y_{i,1}, ..., Y_{i,j})^J$ on tuntematon vektori, joka on riippumaton struktuurimuuttujasta Θ_i ja β on tuntematon skalaarifunktio.

Oletus 3 *Jakaumaoletukset vektorille* Y_i*:* $\mathbb{E}(Y_i) = y = (y_1, ..., y_j)^J$ on riippumaton sattumisvuodesta i. Vektorin Y_i kovarianssi $cov(Y_i) = \frac{r^2}{p_i} I_{t\times t}$, missä r^2 on tuntematon skalaari, joka on riippumaton sattumisvuodesta i, p_i on tunnettu sattumisvuoden i markkinavolyymi ja $I_{t\times t}$ on t-dimensioinen yksikkömatriisi.

Oletus 4 *Struktuurimuuttujat* $\Theta_1, ..., \Theta_j$ *ovat samoin jakautuneita.*

Merkitään struktuuriparametrit b, a ja s^2, jotka ovat samantyyliset kuin Bühlmannin malleissa:

$$b = \mathbb{E}[\beta(\Theta_i)],$$
$$a = Var[\beta(\Theta_i)],$$
$$s^2 = r^2\mathbb{E}[\beta^2(\Theta_i)].$$

De Vylderin menetelmän tarkoituksena on estimoida vielä tuntemattomille selviämisjakauman alkioille $X_{i,j}$ ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X_{i,j}|\Theta_i)$. Ehdollinen odotusarvo voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{E}(X_{i,j}|\Theta_i) = \mathbb{E}(Y_{i,j}\beta(\Theta_i)|\Theta_i) = \mathbb{E}(Y_{i,j})\beta(\Theta_i) = y_j\beta(\Theta_i), \tag{2.1}$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa oletuksesta 2 (tulo-oletus) ja viimeinen yhtäsuuruus oletuksesta 3 (jakaumaoletus). Riittää siis estimoida vektori y ja löytää kredibiliteettiestimaatti B_i skalaarifunktiolle $\beta(\Theta_i)$. Kyseinen estimaatti voidaan laskea kaavalla

$$B_i = (1 - z_i)b + z_i\hat{b}_i, \tag{2.2}$$

missä

$$\hat{b}_i = \sum_{j\epsilon T_i} y_j X_{i,j} / \sum_{j\epsilon T_i} y_j^2, \tag{2.3}$$

$$z_i = a/(a + s_i^2\omega_i), \tag{2.4}$$

$$s_i^2 = \mathbb{E}[\sigma_i^2(\Theta_i)] = s^2/p_i, \tag{2.5}$$

$$\omega_i = 1/\sum_{j\epsilon T_i} y_j^2. \tag{2.6}$$

Muuttujan z_i kaavaan päästään minimoimalla funktion B_i varianssia $Var(B_i) = Var((1 - z_i)b) + Var(z_i\hat{b}_i) = (1 - z_i)^2 Var(b) + z_i^2 Var(\hat{b}_i)$. Minimikohta löytyy derivoimalla yllä olevaa yhtälöä ja kaavan (2.4) muotoon päästään, kun sijoitetaan a ja $s_i^2\omega_i$ sopiviin kohtiin.

2.1.2 Parametrien estimointi

Estimaatit termeille b, y_j, s^2 ja a pitää arvioida aineistosta. Tulo-oletuksesta seuraa, että voimme jakaa termiä Y_i millä luvulla tahansa ja kertoa termiä $\beta(\Theta_i)$ samalla luvulla. Täten voimme valita $b = 1$. De Vylderin menetelmässä saadaan muut estimaatit kaavoista:

$$\hat{y}_j = \sum_{i\epsilon K_j} p_i X_{i,j} / \sum_{i\epsilon K_j} p_i \ , \tag{2.7}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} z_i(\hat{b}_i - b)^2 = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} z_i(\hat{b}_i - 1)^2 \ , \tag{2.8}$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{j} p_i \sum_{j\epsilon T_i}(X_{i,j} - y_j\hat{b}_i)^2 \ , \tag{2.9}$$

missä

$$m = \sum_{i=1}^{j} (t_i - 1). \tag{2.10}$$

Huomataan, että jotta voidaan laskea $\hat{a}$, niin tarvitaan z_i. Muuttuja z_i riippuu kuitenkin estimaatista a. Ongelma ratkaistaan sijoittamalla lauseke $a/(a+s_i^2\omega_i)$ kaavan (2.8) z_i paikalle, jolloin saadaan

$$\hat{a} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{a}{a + s_i^2 \omega_i} (\hat{b}_i - 1)^2, \tag{2.11}$$

missä s_i^2, ω_i ja $\hat{b}_i$ ovat laskettuina. Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista $\hat{a}$, jonka jälkeen voidaan laskea z_i.

2.2 Hadidin menetelmä

2.2.1 Taustaoletukset ja mallin selitys

Hadidin menetelmä on De Vylderin menetelmästä tehty muunnos, joka perustuu ajatukseen, että vakuutusyhtiöllä voi olla riippumattomasti muodostunut epäilys trendistä, joka vaikuttaa tulevaisuuden korvausmääriin. Oletetaan, että vektori $V' = (v_1, v_2, ..., v_j)$ kuvaa tätä trendiä. V' on riippumaton eri kehitysvuosien keskimääräistä vahinkomenoa kuvaavasta vektorista Y, mutta korreloi sattumisvuoden i vahinkomenorivin X_i kanssa. Hadidin menetelmässä otetaan aiemman tulo-oletuksen $X_i = \beta(\Theta_i)Y_i$ lisäksi käyttöön oletus $X_i = \beta'(\Theta_i)V$. Skalaarifunktio $\beta'(\Theta_i)$ on vastaavanlainen skalaari kuin $\beta(\Theta_i)$. Kuten De Vylderin menetelmässä, arvioidaan tuntemattomat alkiot ehdollisena odotusarvona $\mathbb{E}(X_{i,j}|\Theta_i) = y_j\beta(\Theta_i)$, mutta skalaarifunktion $\beta(\Theta_i)$ kredibiliteettiestimaatti B_i' lasketaan kaavalla

$$B_i' = (1 - z_i - z_i')b + z_i b_i + z_i' b_i'. \tag{2.12}$$

Parametria b voidaan tässäkin skaalata sopivalla tavalla ykköseksi. Estimaattia b_i' voidaan laskea vastaavalla tavalla kuin $\hat{b}_i$ kaavassa (2.3), mutta vektorin Y alkioiden paikalla on vektorin V alkiot. Minimoimalla kredibiliteettiestimaatin B_i' varianssia voidaan estimoida z_i ja z_i'. Kyseinen varianssi saadaan muotoon

$$Var(B_i') = (1 - z_i - z_i')^2 Var(b) + z_i^2 Var(b_i) + z_i'^2 Var(b_i').$$

Merkitään $Var(b) = a, Var(b_i) = s^2\omega_i$ ja $Var(b_i') = s'^2\omega_i'$. Derivoimalla yhtälöä molempien muuttujien suhteen ja merkitsemällä osittaisderivaatat nolliksi päädytään lopulta kaavoihin

$$z_i = k_i a s'^2 \omega'_i, \tag{2.13}$$

$$z'_i = k_i a s^2 \omega_i, \tag{2.14}$$

missä

$$k_i = 1/(\hat{a}\hat{s}^2\omega_i + \hat{a}\hat{s}'^2\omega_i + \hat{s}^2\hat{s}'^2\omega_i\omega'_i). \tag{2.15}$$

Huomioitavaa on, että $\hat{s}^2$, ω_i ja $\hat{a}$ lasketaan De Vylderin mallin mukaisesti. Estimaatti $\hat{s}'^2$ lasketaan kaavalla (2.9), mutta vektorin Y arvot korvataan vektorin V arvoilla ja $\hat{b}_i$ tilalla on $\hat{b}'_i$. Muuttuja ω'_i lasketaan kaavan (2.6) mukaisesti, mutta vektorin Y paikalla on taas V. Hadidin menetelmän käyttämiseen vaaditaan siis, että lasketaan ensin perinteisen De Vylderin mukaiset estimaatit tarvittavin osin.

2.3 Mackin menetelmä

2.3.1 Taustaoletukset ja mallin selitys

Mackin menetelmä lähtee myös oletuksesta, että sattumisvuoden i korvaukset ovat riippuvaisia struktuuriparametrista θ_i, joka on struktuurimuuttujan Θ_i tuntematon realisaatio. Menetelmässä on muutenkin samankaltaisia oletuksia kuin De Vylderin menetelmässä: sattumisvuodet oletetaan riippumattomiksi toisistaan (oletus 1), struktuurimuuttujat $\Theta_1, ..., \Theta_k$ samoin jakautuneiksi (oletus 4) ja oletetaan, että tuntemattomia alkioita voi estimoida kaavalla $\mathbb{E}(X_{i,j}|\Theta_i) = y_j\beta(\Theta_i)$ (ehdollisen odotusarvon kaava).

De Vylderin menetelmässä varianssi on riippumaton kehitysvuodesta j. Useissa vakuutuslajeissa, kuten esimerkiksi vastuuvakuutuksissa, korvaukset selviävät useamman vuoden vahingon sattumisen jälkeen. Korvausten arvioitu määrä voi lisäksi vaihdella, jos korvaukset riippuvat esimerkiksi tuomioistuimen päätöksestä tai lääkehoidon kestosta. On lisäksi intuitiivisesti selvää, että kehitysvuosien keskimääräiset vahingot $y_1, ..., y_J$ vähenevät kohti nollaa ajan saatossa, sillä tietyn ajan jälkeen kaikki vahingot ovat selvillä ja sovittuina. Edellä mainitut asiat johtavat siihen, että kiinnitetyn sattumisvuoden i eri kehitysvuosien odotusarvoissa on eroja. Satunnaismuuttuja $X_{i,j}$ on lisäksi suurella todennäköisyydellä nollaa suurempi, joten on epätodennäköistä, että varianssi olisi vuodesta toiseen sama. Mackin menetelmässä päädytään varianssiin, joka on muotoa

$$Var(X_{i,j}|\Theta_j) = y_j^{2-\alpha}\sigma^2(\Theta_i)/p_i.$$

Mackin menetelmän perusoletuksena on, että $\alpha = 1$. Kun $\alpha = 2$, niin päädytään De Vylderin varianssioletukseen ja kun $\alpha = 0$, niin jakaumia paisutetaan tai pienennetään suhteessa muuttujan y_j suuruuteen.

Mackin menetelmässä määritellään pari satunnaismuuttujaa, jotka riippuvat aiemmin määritellyistä satunnaismuuttujista. Otetaan ensin käyttöön satunnaismuuttuja

$$Z_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{y_j},$$

jolle pätee

$$\mathrm{Cov}(Z_{i,j}, Z_{i,u}|\Theta_i) = 0, \text{kun } j \neq u,$$
$$\mathbb{E}(Z_{i,j}|\Theta_i) = \beta(\Theta_i),$$
$$\mathrm{Var}(Z_{i,j}|\Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i)/(p_i y_j^\alpha).$$

Mackin mallissa on voimassa De Vylderin menetelmästä tuttu tulo-oletus $X_{i,j} = Y_j\beta(\Theta_i)$. Merkitään $\mathbb{E}(X_{i,j}) = x_j$, $\mathbb{E}(Y_i) = y$ ja $\mathbb{E}(\beta(\Theta_i)) = b$ kaikilla i, jolloin tulo-oletus voidaan kirjoittaa muodossa $x_j = y_j b$, missä

$$x_j = \sum_{i \epsilon K_j} p_i X_{i,j} / \sum_{i \epsilon K_j} p_i. \tag{2.16}$$

Muuttujan x_j laskentatapa on siis sama kuin De Vylderin tapa laskea muuttujaa y_j. Määritellään seuraavaksi satunnaismuuttuja $\tilde{Z}_{i,j}$:

$$\tilde{Z}_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{x_j} = \frac{Z_{i,j} y_j}{y_j b} = \frac{Z_{i,j}}{b}. \tag{2.17}$$

Muuttujan $\tilde{Z}_{i,j}$ tunnusluvut ovat

$$\mathrm{Cov}(\tilde{Z}_{i,j}, \tilde{Z}_{i,u}|\Theta_i) = 0, \text{kun} j \neq u,$$

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}_{i,j}|\Theta_i) = \frac{\beta(\Theta_i)}{b} = \tilde{\beta}(\Theta_i),$$
$$\mathrm{Var}(\tilde{Z}_{i,j}|\Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i)/(p_i x_j^\alpha).$$

Satunnaismuuttujan $\tilde{Z}_{i,j}$ mukaisessa mallissa on samat ominaisuudet kuin muuttujan $Z_{i,j}$ mallissa, mutta etuna on, että $\mathbb{E}(\tilde{\beta}(\Theta_i)) = 1$. Menetelmän tarkoituksena on nyt laskea kredibiliteettiestimaatti tuntemattomalle satunnaismuuttujalle $\tilde{Z}_{i,u}$ kaavalla

$$\tilde{Z}_{i,u} = z_i Z_i + 1 - z_i, \tag{2.18}$$

missä

$$Z_i = \sum_{j \epsilon T_i} x_j^\alpha \tilde{Z}_{i,j}/v_i, \tag{2.19}$$

$$v_i = \sum_{j \epsilon T_i} x_j, \tag{2.20}$$

$$z_i = p_i v_i/(p_i v_i + c/a), \tag{2.21}$$

$$c = \mathbb{E}(\tilde{\sigma}^2(\Theta_i)), \tag{2.22}$$

$$a = Var(\tilde{\beta}(\Theta_i)) \tag{2.23}$$

Tuntemattomat korvausmenon arviot sattumisvuodelle i ja kehitysvuodelle u saadaan lopuksi laskettua estimaatista

$$\hat{X}_{i,u} = x_u \hat{\tilde{Z}}_{i,u}. \tag{2.24}$$

2.3.2 Parametrien estimointi

Struktuuriparametrien $x_1, ..., x_J, a$ ja c arvot eivät ole tiedossa, vaan niitä tulee arvioida tilastoaineistosta. Arviot muuttujille x_j saadaan kaavalla (2.16). Parametrin c estimaatti on

$$\hat{c} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{j} p_i \sum_{j \epsilon T_i} x_j^\alpha (\tilde{Z}_{i,j} - Z_i)^2, \tag{2.25}$$

missä

$$m = \sum_{i=1}^{j} (t_i - 1) \tag{2.26}$$

ja t_i on joukon T_i alkioiden lukumäärä. Parametrille a löytyy kaksi vaihtoehtoista estimaattia:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{j} p_i v_i (Z_i - 1)^2 - j\hat{c} \right) \tag{2.27}$$

missä

$$n = \sum_{i=1}^{j} p_i v_i, \tag{2.28}$$

tai epätarkempi estimaatti

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} z_i (Z_i - 1)^2. \tag{2.29}$$

Kuten De Vylderin menetelmässä, joudutaan estimaattia $\hat{a}_2$ laskettaessa ensin sijoittamaan muuttujan z_i paikalle $p_i v_i/(p_i v_i + c/a)$, jotta saadaan ratkaistua yhtälöstä $\hat{a}_2$.

Luku 3

Esimerkkejä korvausvastuun arvioinnista

Tässä luvussa arvioidaan korvausvastuuta käyttämällä esitettyjä menetelmiä. Jokaisen menetelmän kohdalla käytetään alla olevaa korvauskolmiota. Kolmiossa näkyvät inkrementaaliset korvaukset eri sattumisvuosina $i = 1, .., 6$ ja kehitysvuosina $j = 1, .., 6$.

	Kehitysvuosi j					
Sattumisvuosi i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	289 003	86 187	20 669	21 494	6 448	2 513
2	342 568	81 473	26 102	16 500	6 457	
3	324 779	92 534	24 842	17 086		
4	344 540	123 672	27 625			
5	485 340	120 168				
6	354 701					

3.1 De Vylderin menetelmä

De Vylderin menetelmän vaiheet ovat:

- Estimoi vektorin y komponentit y_j käyttäen kaavaa (2.7).
- Laske ω_i käyttäen kaavaa (2.6).
- Laske $\hat{b}_i$ käyttäen kaavaa (2.3).
- Estimoi s^2 käyttäen kaavaa (2.9).

- Laske s_i^2 käyttäen kaavaa (2.5) ja tämän jälkeen $s_i^2\omega_i$.
- Muodosta yhtälö parametrille a sijoittamalla yhtälöön (2.8) yhtälö (2.4) ja ratkaise a.
- Laske z_i käyttäen kaavaa (2.4).
- Laske kredibiliteettiestimaatti B_i käyttäen kaavaa (2.2).
- Lopuksi voidaan laskea tuntemattomien alkioiden arviot ehdollisena odotusarvona käyttämällä kaavaa (2.1).

Estimoidaan ensin vektori y kehitysvuosisarakkeiden keskiarvoina:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_{1,1}+X_{2,1}+X_{3,1}+X_{4,1}+X_{5,1}+X_{6,1})/6 \\ (X_{1,2}+X_{2,2}+X_{3,2}+X_{4,2}+X_{5,2})/5 \\ (X_{1,3}+X_{2,3}+X_{3,3})+X_{4,3})/4 \\ (X_{1,4}+X_{2,4}+X_{3,4})/3 \\ (X_{1,5}+X_{2,5})/2 \\ (X_{1,6})/1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 356\ 821.8 \\ 100\ 806.8 \\ 24\ 809.5 \\ 18\ 360.0 \\ 6\ 452.5 \\ 2\ 513.0 \end{bmatrix}$$

Laskettujen keskiarvojen avulla voidaan laskea ω_i,

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2) \\ 1/(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2) \\ 1/(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) \\ 1/(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \\ 1/(y_1^2+y_2^2) \\ 1/y_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.22103\times10^{-12} \\ 7.22136\times10^{-12} \\ 7.22353\times10^{-12} \\ 7.24116\times10^{-12} \\ 7.27358\times10^{-12} \\ 7.85411\times10^{-12} \end{bmatrix}$$

jonka jälkeen lasketaan $\hat{b}_i$.

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \\ \hat{b}_5 \\ \hat{b}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1X_{1,1}+y_2X_{1,2}+y_3X_{1,3}+y_4X_{1,4}+y_5X_{1,5}+y_6X_{1,6})\omega_1 \\ (y_1X_{2,1}+y_2X_{2,2}+y_3X_{2,3}+y_4X_{2,4}+y_5X_{2,5})\omega_2 \\ (y_1X_{3,1}+y_2X_{3,2}+y_3X_{3,3}+y_4X_{3,4})\omega_3 \\ (y_1X_{4,1}+y_2X_{4,2}+y_3X_{4,3})\omega_4 \\ (y_1X_{5,1}+y_2X_{5,2})\omega_5 \\ (y_1X_{6,1})\omega_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.814288 \\ 0.949182 \\ 0.911222 \\ 0.985463 \\ 1.347749 \\ 0.994056 \end{bmatrix}$$

Seuraavaksi estimoidaan $\hat{s}^2$, jota varten lasketaan ensin $\sum_{j \epsilon T_i}(X_{i,j} - y_j\hat{b}_i)^2$:

$$\begin{bmatrix} (X_{1,j} - y_j\hat{b}_1)^2 \\ (X_{2,j} - y_j\hat{b}_2)^2 \\ (X_{3,j} - y_j\hat{b}_3)^2 \\ (X_{4,j} - y_j\hat{b}_4)^2 \\ (X_{5,j} - y_j\hat{b}_5)^2 \\ (X_{6,j} - y_j\hat{b}_6)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_{1,1} - y_1\hat{b}_1)^2 + (X_{1,2} - y_2\hat{b}_1)^2 + ... + (X_{1,6} - y_6\hat{b}_1)^2 \\ (X_{2,1} - y_1\hat{b}_2)^2 + (X_{2,2} - y_2\hat{b}_2)^2 + ... + (X_{2,5} - y_5\hat{b}_2)^2 \\ (X_{3,1} - y_1\hat{b}_3)^2 + (X_{3,2} - y_2\hat{b}_3)^2 + ... + (X_{3,4} - y_4\hat{b}_3)^2 \\ (X_{4,1} - y_1\hat{b}_4)^2 + (X_{4,2} - y_2\hat{b}_4)^2 + (X_{4,3} - y_3\hat{b}_4)^2 \\ (X_{5,1} - y_1\hat{b}_5)^2 + (X_{5,2} - y_2\hat{b}_5)^2 \\ (X_{6,1} - y_1\hat{b}_6)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.39117\times10^7 \\ 2.24489\times10^8 \\ 5.71308\times10^6 \\ 6.52402\times10^8 \\ 2.65968\times10^8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Summaksi muodostuu näin $\sum_{j \epsilon T_i}(X_{i,j} - y_j\hat{b}_i)^2 = 1.21248 \times 10^9$. Tunnettuja alkioita on yhteensä 21, joten tarvittava m on 15. Markkinavolyymi p_i on kaikilla sattumisvuosilla 1, joten

$$\hat{s}^2 = \frac{1.21248 \times 10^9}{15} = 8.08323 \times 10^7.$$

Koska volyymikerroin p_i on 1, niin $s_i^2 = \hat{s}^2$ ja voidaan laskea

$$\begin{bmatrix} s_1^2\omega_1 \\ s_2^2\omega_2 \\ s_3^2\omega_3 \\ s_4^2\omega_4 \\ s_5^2\omega_5 \\ s_6^2\omega_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s}^2\omega_1 \\ \hat{s}^2\omega_2 \\ \hat{s}^2\omega_3 \\ \hat{s}^2\omega_4 \\ \hat{s}^2\omega_5 \\ \hat{s}^2\omega_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.83692\times10^{-4} \\ 5.83719\times10^{-4} \\ 5.83895\times10^{-4} \\ 5.85320\times10^{-4} \\ 5.87940\times10^{-4} \\ 6.34866\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

Parametrin a estimaatti lasketaan kaavalla (2.11), eli

$$a = \frac{1}{j}\left[\frac{a}{a + \hat{s}^2\omega_1}(\hat{b}_1 - 1)^2 + \frac{a}{a + \hat{s}^2\omega_2}(\hat{b}_2 - 1)^2 + ... + \frac{a}{a + \hat{s}^2\omega_6}(\hat{b}_6 - 1)^2\right].$$

Yhtälö voidaan ratkaista parametrin a suhteen, jolloin saadaan $\hat{a} = 0.0271013$. Nyt voidaan laskea kredibiliteettikertoimet z_i

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/(a + \hat{s}^2\omega_1) \\ a/(a + \hat{s}^2\omega_2) \\ a/(a + \hat{s}^2\omega_3) \\ a/(a + \hat{s}^2\omega_4) \\ a/(a + \hat{s}^2\omega_5) \\ a/(a + \hat{s}^2\omega_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.978917 \\ 0.978916 \\ 0.978910 \\ 0.978859 \\ 0.978766 \\ 0.977111 \end{bmatrix}$$

ja kredibiliteettiestimaatti B_i

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-z_1)+z_1\hat{b}_1 \\ (1-z_2)+z_2\hat{b}_2 \\ (1-z_3)+z_3\hat{b}_3 \\ (1-z_4)+z_4\hat{b}_4 \\ (1-z_5)+z_5\hat{b}_5 \\ (1-z_6)+z_6\hat{b}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.818203 \\ 0.950254 \\ 0.913094 \\ 0.985770 \\ 1.340365 \\ 0.994192 \end{bmatrix}$$

Tuntemattomien alkioiden korvaukset voidaan nyt arvioida odotusarvon kaavalla (2.1), missä $B(\Theta_i)$ estimaattina käytetään B_i. Korvausvastuun arvio näkyy taulukossa (3.1).

	Kehitysvuosi j						
Sattumis-vuosi i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Korvaus-vastuu**
1	289 003	86 187	20 669	21 494	6 448	2 513	**0**
2	342 568	81 473	26 102	16 500	6 457	**2 388**	**2 388**
3	324 779	92 534	24 842	17 086	**5 892**	**2 295**	**8 186**
4	344 540	123 672	27 625	**18 099**	**6 361**	**2 477**	**26 937**
5	485 340	120 168	**33 254**	**24 609**	**8 649**	**3 368**	**69 880**
6	354 701	**100 221**	**24 665**	**18 253**	**6 415**	**2 498**	**152 054**
							$\sum$ =**259 444**

Taulukko 3.1: De Vylderin menetelmällä laskettu korvausvastuu.

3.2 Hadidin menetelmä

Hadidin menetelmän työvaiheet ovat:

- Laske De Vylderin menetelmällä suureet $\hat{b}_i$,$\hat{s}^2$, ω_i ja $\hat{a}$.
- Muodosta vektori V vastaamaan arvioitua trendiä.
- Laske ω_i' käyttäen kaavaa (2.6) (vektorin V arvot vektorin Y paikalle).
- Laske $\hat{b}_i'$ käyttäen kaavaa (2.3) (vektorin V arvot vektorin Y paikalle).
- Laske $\hat{s}'^2$ käyttäen kaavaa (2.9) (vektorin V arvot vektorin Y paikalle).
- Laske k_i kaavalla (2.15).

- Laske z_i ja z_i' käyttäen kaavoja (2.13) ja (2.14).
- Laske kredibiliteettiestimaatti B_i' käyttäen kaavaa (2.12) ja lopuksi tuntemattomien alkioiden arviot ehdollisena odotusarvona $X_{i.j} = y_j B_i'$.

Oletetaan, että vakuutusyhtiön aktuaarin arvion mukaan kehitysvuosien 1 ja 2 toteutuneet korvaukset ovat olleet poikkeuksellisen suuret parin viime vuoden aikana. Kyseessä on siis korvauskolmion alkiot $X_{6,1}, X_{5,1}, X_{5,2}$ ja $X_{4,2}$. Aktuaari pitää todennäköisenä, että edeltävien vuosien korvaukset kuvaavat oikeaa korvausmäärän tasoa paremmin. Aktuaari haluaa De Vylderin mallin antamalle korvausvastuun arviolle toisen arvion Hadidin menetelmällä, jossa vektori V luodaan poistamalla aiemmin mainittujen alkioiden korvaukset. Vektoriksi V muodostuu:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} + X_{4,1})/4 \\ (X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2})/3 \\ (X_{1,3} + X_{2,3} + X_{3,3} + X_{3,4})/4 \\ (X_{1,4} + X_{2,4} + X_{3,4})/3 \\ (X_{1,5} + X_{2,5})/2 \\ (X_{1,6})/1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 325\,222.50 \\ 86\,731.33 \\ 24\,809.50 \\ 18\,360.00 \\ 6\,452.50 \\ 2\,513.00 \end{bmatrix}$$

Lasketaan vektorin V avulla ω_i',

$$\begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \\ \omega_3' \\ \omega_4' \\ \omega_5' \\ \omega_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + v_6^2) \\ 1/(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2) \\ 1/(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2) \\ 1/(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ 1/(v_1^2 + v_2^2) \\ 1/v_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.22103 \times 10^{-12} \\ 7.22136 \times 10^{-12} \\ 7.22353 \times 10^{-12} \\ 7.24116 \times 10^{-12} \\ 7.27358 \times 10^{-12} \\ 7.85411 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

ja tämän jälkeen $\hat{b}_i'$.

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1' \\ \hat{b}_2' \\ \hat{b}_3' \\ \hat{b}_4' \\ \hat{b}_5' \\ \hat{b}_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1X_{1,1} + v_2X_{1,2} + v_3X_{1,3} + v_4X_{1,4} + v_5X_{1,5} + v_6X_{1,6})\omega_1' \\ (v_1X_{2,1} + v_2X_{2,2} + v_3X_{2,3} + v_4X_{2,4} + v_5X_{2,5})\omega_2' \\ (v_1X_{3,1} + v_2X_{3,2} + v_3X_{3,3} + v_4X_{3,4})\omega_3' \\ (v_1X_{4,1} + v_2X_{4,2} + v_3X_{4,3})\omega_4' \\ (v_1X_{5,1} + v_2X_{5,2})\omega_5' \\ (v_1X_{6,1})\omega_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.896128 \\ 1.045351 \\ 1.002945 \\ 1.083895 \\ 1.485240 \\ 1.090641 \end{bmatrix}$$

Parametrin s'^2 estimaattia varten lasketaan ensin $\sum_{j\epsilon T_i}(X_{i,j} - v_j\hat{b}'_i)^2$:

$$\begin{bmatrix} (X_{1,j} - v_j\hat{b}'_1)^2 \\ (X_{2,j} - v_j\hat{b}'_2)^2 \\ (X_{3,j} - v_j\hat{b}'_3)^2 \\ (X_{4,j} - v_j\hat{b}'_4)^2 \\ (X_{5,j} - v_j\hat{b}'_5)^2 \\ (X_{6,j} - v_j\hat{b}'_6)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_{1,1} - v_1\hat{b}'_1)^2 + (X_{1,2} - v_2\hat{b}'_1)^2 + ... + (X_{1,6} - v_6\hat{b}'_1)^2 \\ (X_{2,1} - v_1\hat{b}'_2)^2 + (X_{2,2} - v_2\hat{b}'_2)^2 + ... + (X_{2,5} - v_5\hat{b}'_2)^2 \\ (X_{3,1} - v_1\hat{b}'_3)^2 + (X_{3,2} - v_2\hat{b}'_3)^2 + ... + (X_{3,4} - v_4\hat{b}'_3)^2 \\ (X_{4,1} - v_1\hat{b}'_4)^2 + (X_{4,2} - v_2\hat{b}'_4)^2 + (X_{4,3} - v_3\hat{b}'_4)^2 \\ (X_{5,1} - v_1\hat{b}'_5)^2 + (X_{5,2} - v_2\hat{b}'_5)^2 \\ (X_{6,1} - v_1\hat{b}'_6)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05962\times 10^8 \\ 9.85894\times 10^7 \\ 3.45009\times 10^7 \\ 9.43986\times 10^8 \\ 8.01226\times 10^7 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Tunnettuja alkioita on 21, joten $m = 21-6 = 15$ ja parametrin $\hat{s}'^2$ estimaatti:

$$\hat{s}'^2 = \frac{1}{15}(1.05962 \times 10^8 + ... + 8.01226 \times 10^7 + 0.00) = 8.42107 \times 10^7.$$

Estimoitiin $\hat{a} = 0.0271013$ De Vylderin menetelmässä. Lasketaan kerroin k_i:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(\hat{a}\hat{s}^2\omega_1 + \hat{a}\hat{s}'^2\omega_1 + \hat{s}^2\hat{s}'^2\omega_1\omega'_1) \\ 1/(\hat{a}\hat{s}^2\omega_2 + \hat{a}\hat{s}'^2\omega_2 + \hat{s}^2\hat{s}'^2\omega_2\omega'_2) \\ 1/(\hat{a}\hat{s}^2\omega_3 + \hat{a}\hat{s}'^2\omega_3 + \hat{s}^2\hat{s}'^2\omega_3\omega'_3) \\ 1/(\hat{a}\hat{s}^2\omega_4 + \hat{a}\hat{s}'^2\omega_4 + \hat{s}^2\hat{s}'^2\omega_4\omega'_4) \\ 1/(\hat{a}\hat{s}^2\omega_5 + \hat{a}\hat{s}'^2\omega_5 + \hat{s}^2\hat{s}'^2\omega_5\omega'_5) \\ 1/(\hat{a}\hat{s}^2\omega_6 + \hat{a}\hat{s}'^2\omega_6 + \hat{s}^2\hat{s}'^2\omega_6\omega'_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27\ 611.22 \\ 27\ 609.80 \\ 27\ 600.41 \\ 27\ 524.39 \\ 27\ 385.57 \\ 25\ 452.77 \end{bmatrix}$$

Lasketaan tämän jälkeen z_i ja z'_i

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1as'^2\omega'_1 \\ k_2as'^2\omega'_2 \\ k_3as'^2\omega'_3 \\ k_4as'^2\omega'_4 \\ k_5as'^2\omega'_5 \\ k_6as'^2\omega'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.551348 \\ 0.551350 \\ 0.551363 \\ 0.551472 \\ 0.551671 \\ 0.549202 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \\ z'_4 \\ z'_5 \\ z'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1as^2\omega_1 \\ k_2as^2\omega_2 \\ k_3as^2\omega_3 \\ k_4as^2\omega_4 \\ k_5as^2\omega_5 \\ k_6as^2\omega_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.436778 \\ 0.436775 \\ 0.436758 \\ 0.436618 \\ 0.436361 \\ 0.437933 \end{bmatrix}$$

ja lopuksi kredibiliteettiestimaatti B'_i (valitaan $b = 1$).

$$\begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \\ B'_4 \\ B'_5 \\ B'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - z_1 - z'_1) + z_1b_1 + z'_1b'_1 \\ (1 - z_2 - z'_2) + z_2b_2 + z'_2b'_2 \\ (1 - z_3 - z'_3) + z_3b_3 + z'_3b'_3 \\ (1 - z_4 - z'_4) + z_4b_4 + z'_4b'_4 \\ (1 - z_5 - z'_5) + z_5b_5 + z'_5b'_5 \\ (1 - z_6 - z'_6) + z_6b_6 + z'_6b'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.852239 \\ 0.991790 \\ 0.952337 \\ 1.028613 \\ 1.403583 \\ 1.036430 \end{bmatrix}$$

Korvausvastuun estimaatti tuntemattomille alkioille saadaan nyt kaavalla $X_{i,j} = y_jB'_i$. Arvioitu korvausvastuu näkyy taulukosta (3.2). Korvausvastuun yhteenlaskettu arvio nousee verrattuna De Vylderin menetelmällä laskettuun arvioon. Tämä johtuu siitä, että poistaessamme ylisuuret korvaukset kehitysvuodesta 1, niin korvausten kokonaismäärästä painottuu suhteellisesti enemmän kehitysvuosille $j > 1$. Korvausvastuuta ei muodostu kehitysvuonna 1, joten kyseisen kehitysvuoden painotuksen väheneminen ei korvausvastuun yhteenlasketussa määrässä näy. Taustalla oleva sattumisvuoden i struktuurimuuttuja Θ_i muuttuu siis niin, että painotusta on enemmän myöhemmissä kehitysvuosissa.

Sattumis-vuosi i	**Kehitysvuosi j** 1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Korvaus-vastuu**
1	289 003	86 187	20 669	21 494	6 448	2 513	**0**
2	342 568	81 473	26 102	16 500	6 457	**2 492**	**2 492**
3	324 779	92 534	24 842	17 086	**6 145**	**2 393**	**8 538**
4	344 540	123 672	27 625	**18 885**	**6 637**	**2 585**	**28 107**
5	485 340	120 168	**34 822**	**25 770**	**9 057**	**3 527**	**73 176**
6	354 701	**104 479**	**25 713**	**19 029**	**6 688**	**2 605**	**158 514**
							$\sum$ =**270 827**

Taulukko 3.2: Hadidin menetelmällä laskettu korvausvastuu.

3.3 Mackin menetelmä

Mackin menetelmässä voidaan valita muuttujan α arvoksi $0, 1$ tai 2. Mackin perusoletuksena on, että $\alpha = 1$, joten kun laskentaa avataan yksityiskohtaisesti, niin käytetään tätä arvoa. Mackin menetelmän vaiheet ovat:

- Estimoi vektorin x komponenttien x_j arvot kaavalla (2.16).
- Laske $\tilde{Z}_{i,j}$ käyttäen kaavaa (2.17).
- Laske v_i käyttäen kaavaa (2.20).
- Laske Z_i käyttäen kaavaa (2.19).
- Laske m käyttäen kaavaa (2.26) ja estimoi parametri c kaavalla (2.25).
- Laske n käyttäen kaavaa (2.28) ja estimoi parametri a joko kaavalla (2.27) tai kaavalla (2.29) .
- Laske z_i kaavalla (2.21)

- Laske $\tilde{Z}_{i,u}$ kaavalla (2.18) ja lopuksi tuntemattomat alkiot kaavalla (2.24).

Vektori x on sama kuin vektori y De Vylderin menetelmässä, joten voidaan käyttää termien x_j paikalla jo laskettujen y_j arvot ja laskea $\tilde{Z}_{i,j}$ jokaisen tunnetun alkion kohdalla:

	Kehitysvuosi j					
Sattumisvuosi i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0.810	0.855	0.833	1.171	0.999	1.000
2	0.960	0.808	1.052	0.899	1.001	
3	0.910	0.918	1.001	0.931		
4	0.966	1.227	1.113			
5	1.360	1.192				
6	0.994					

Lasketaan termit v_i,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 509\ 763.63 \\ 507\ 250.63 \\ 500\ 798.13 \\ 482\ 438.13 \\ 457\ 628.63 \\ 356\ 821.83 \end{bmatrix}$$

jonka jälkeen voidaan laskea Z_i.

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1\tilde{Z}_{1,1} + x_2\tilde{Z}_{1,2} + x_3\tilde{Z}_{1,3} + x_4\tilde{Z}_{1,4} + x_5\tilde{Z}_{1,5} + x_6\tilde{Z}_{1,6})/v_1 \\ (x_1\tilde{Z}_{2,1} + x_2\tilde{Z}_{2,2} + x_3\tilde{Z}_{2,3} + x_4\tilde{Z}_{2,4} + x_5\tilde{Z}_{2,5})/v_2 \\ (x_1\tilde{Z}_{3,1} + x_2\tilde{Z}_{3,2} + x_3\tilde{Z}_{3,3} + x_4\tilde{Z}_{3,4})/v_3 \\ (x_1\tilde{Z}_{4,1} + x_2\tilde{Z}_{4,2} + x_3\tilde{Z}_{4,3})/v_4 \\ (x_1\tilde{Z}_{5,1} + x_2\tilde{Z}_{5,2})/v_5 \\ x_1\tilde{Z}_{6,1}/v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83630 \\ 0.93268 \\ 0.91702 \\ 1.02777 \\ 1.32314 \\ 0.99406 \end{bmatrix}$$

Parametrin c estimointia varten lasketaan ensin $\sum_{j\epsilon T_i} x_j(\tilde{Z}_{i,j} - Z_i)^2$.

$$\begin{bmatrix} x_j(\tilde{Z}_{1,j} - Z_1)^2 \\ x_j(\tilde{Z}_{2,j} - Z_1)^2 \\ x_j(\tilde{Z}_{3,j} - Z_1)^2 \\ x_j(\tilde{Z}_{4,j} - Z_1)^2 \\ x_j(\tilde{Z}_{5,j} - Z_1)^2 \\ x_j(\tilde{Z}_{6,j} - Z_1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\tilde{Z}_{1,1} - Z_1)^2 + x_2(\tilde{Z}_{1,2} - Z_1)^2 + ... + x_6(\tilde{Z}_{1,6} - Z_1)^2 \\ x_1(\tilde{Z}_{2,1} - Z_2)^2 + x_2(\tilde{Z}_{2,2} - Z_2)^2 + ... + x_5(\tilde{Z}_{2,5} - Z_2)^2 \\ x_1(\tilde{Z}_{3,1} - Z_3)^2 + x_2(\tilde{Z}_{3,2} - Z_3)^2 + ... + x_4(\tilde{Z}_{3,4} - Z_3)^2 \\ x_1(\tilde{Z}_{4,1} - Z_4)^2 + x_2(\tilde{Z}_{4,2} - Z_4)^2 + x_3(\tilde{Z}_{4,3} - Z_4)^2 \\ x_1(\tilde{Z}_{5,1} - Z_5)^2 + x_2(\tilde{Z}_{5,2} - Z_5)^2 \\ x_1(\tilde{Z}_{6,1} - Z_6)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2575.23 \\ 2234.01 \\ 196.34 \\ 5556.46 \\ 2221.40 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Tunnettuja alkioita on 21, joten $m = 15$. Markkinavolyymi on esimerkissä kaikkina vuosina sama, joten $p_i = 1$. Parametrin c estimaatiksi saadaan

$$\hat{c} = \frac{1}{15}(2575.23 + .. + 2221.40 + 0.00) = 852.23.$$

Lasketaan seuraavaksi muuttuja n:

$$n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 2\ 814\ 701.$$

Tämän jälkeen lasketaan estimaatti parametrille a, joka voidaan laskea joko kaavalla

$$\hat{a}_1 = \frac{(Z_1 - 1)^2 + ... + (Z_6 - 1)^2 - 6 \cdot 852.23}{2\ 814\ 701} = 0.022193$$

tai kaavalla

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{6}[\frac{v_1}{v_1 + c/\hat{a}_2}(Z_1 - 1)^2 + \frac{v_2}{v_2 + c/\hat{a}_2}(Z_2 - 1)^2 + ... + \frac{v_6}{v_6 + c/\hat{a}_2}(Z_6 - 1)^2].$$

Ratkaisemalla toista yhtälöä muuttujan $\hat{a}_2$ suhteen, saadaan $\hat{a}_2 = 0.022095$.

Lasketaan muuttujan z_i arvot käyttäen parametrin a arvona $\hat{a}_1$,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1/(v_1 + c/a) \\ v_2/(v_2 + c/a) \\ v_3/(v_3 + c/a) \\ v_4/(v_4 + c/a) \\ v_5/(v_5 + c/a) \\ v_6/(v_6 + c/a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.92995 \\ 0.92962 \\ 0.92878 \\ 0.92627 \\ 0.92258 \\ 0.90284 \end{bmatrix}$$

jonka jälkeen lasketaan krebiliteettiestimaatti $\hat{\hat{Z}}_{i,u}$.

$$\begin{bmatrix} \hat{\hat{Z}}_{1,u} \\ \hat{\hat{Z}}_{2,u} \\ \hat{\hat{Z}}_{3,u} \\ \hat{\hat{Z}}_{4,u} \\ \hat{\hat{Z}}_{5,u} \\ \hat{\hat{Z}}_{6,u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 Z_1 + 1 - z_1 \\ z_2 Z_2 + 1 - z_2 \\ z_3 Z_3 + 1 - z_3 \\ z_4 Z_4 + 1 - z_4 \\ z_5 Z_5 + 1 - z_5 \\ z_6 Z_6 + 1 - z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84777 \\ 0.93741 \\ 0.92293 \\ 1.02573 \\ 1.29813 \\ 0.99463 \end{bmatrix}$$

Selviämiskolmion tuntemattomat alkiot saadaan nyt kaavalla $X_{i,u} = x_u \hat{\hat{Z}}_{i,u}$. Yhteenlaskettu arvioitu korvausvastuu näkyy taulukosta (3.3).

			Kehitysvuosi j				
Sattumis- vuosi i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Korvaus- vastuu**
1	289 003	86 187	20 669	21 494	6 448	2 513	0
2	342 568	81 473	26 102	16 500	6 457	**2 356**	2 356
3	324 779	92 534	24 842	17 086	**5 955**	**2 319**	8 275
4	344 540	123 672	27 625	**18 832**	**6 618**	**2 578**	28 028
5	485 340	120 168	**32 206**	**23 834**	**8 376**	**3 262**	67 678
6	354 701	**100 266**	**24 676**	**18 261**	**6 418**	**2 500**	152 121
							$\sum =$**258 458**

Taulukko 3.3: Mackin menetelmällä laskettu korvausvastuu, kun $\alpha = 1$.

Lasketaan vielä Mackin menetelmän arviot, kun valitaan $\alpha = 0$ ja $\alpha = 2$. Alla olevien taulukoiden lukujen laskennassa on parametrin a estimaattina käytetty $\hat{a}_1$.

$\alpha = 2$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	
Z_i	0.814	0.949	0.911	0.985	1.348	0.994	$\hat{c} = 80\ 832\ 289$
z_i	0.979	0.979	0.979	0.979	0.979	0.977	$\hat{a}_1$=0.02737
$\hat{\hat{Z}}_{i,u}$	0.818	0.950	0.913	0.986	1.340	0.994	$\hat{a}_2$=0.02710
Korvausvastuu	0	2 388	8 186	26 937	69 880	152 054	$\sum = 259\ 444$

$\alpha = 0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	
Z_i	0.945	0.944	0.940	1.102	1.276	0.994	$\hat{c} = 0.01234$
z_i	0.785	0.753	0.709	0.647	0.550	0.379	$\hat{a}_1$=0.00753
$\hat{\hat{Z}}_{i,u}$	0.957	0.958	0.957	1.066	1.152	0.998	$\hat{a}_2$=0.010599
Korvausvastuu	0	2 407	8 584	29 127	60 047	152 597	$\sum = 252\ 763$

3.4 Loppusanat

Korvausvastuun laskenta kredibiliteettimenetelmien avulla antaa vakuutusyhtiöille lisätyökalun korvausvastuun arviointiin. Esimerkissämme De Vylderin ja Mackin menetelmien tulokset olivat lähellä toisiaan riippumatta Mackin menetelmässä esiintyvän muuttujan α valinnasta. Hadidin menetelmä on erilainen siinä mielessä, että sen avulla voidaan arvioida korvausvastuuta eri trendien toteutuessa. Kyseisellä menetelmällä voi siis tehdä herkkyysanalyysejä eri taustailmiöiden vaikutuksista tulevaisuuden korvausmääriin.

Kirjallisuutta

[1] Daykin, C.D.,Pentikäinen, T., Pesonen, M. 1994 *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman Hall. s. 310-313.

[2] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. 2001. *Modern actuarial risk theory*, Kluwer Academic Publishers. s. 137-157.

[3] Sweeting, P. 2011. *Financial Enterprise Risk Management*, Cambridge University Press. s. 262-269.

[4] Bühlmann, H.,Gisler, A.,2005 *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer. s. 60-64.

[5] De Vylder, F. 1982. *Estimation of IBNR Claims by Credibility Theory*, Insurance, Mathematics and Economics, Vol. 1, No. 1. s. 35-40.

[6] Hadidi N. 1985. *A Note on De Vylder's Method of Estimation of IBNR Claims*, Insurance, Mathematics and Economics, Vol. 4, No. 1. s. 263-266.

[7] Mack, T. 1990. *Improved estimation of IBNR Claims by Credibility Theory*, Insurance, Mathematics and Economics, Vol. 9, No. 1. s. 51-57.

[8] Palosaari, P., Pursiheimo A., 1997. *Korvausvastuun estimointimenetelmistä*, Turun yliopisto, Turku, Opinnäyte. s.66-91.